MA2001-1 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Javier Ramírez Ganga.
Auxiliar: Anaís Muñoz P.

Auxiliar 9: Optimizacion (Con y sin restriccion) uwu

9 de enero 2025

P1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = xy(1 - x - y)$$

Encuentre los puntos críticos de f y clasifíquelos según sean máximos, mínimos o puntos de silla.

P2. Verifique que el punto (1,1,1) es critico para la siguiente funcion:

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$$

Ademas, determine su naturaleza.

P3. Considere el problema de optimización con restricción

$$(P) \quad \begin{cases} \text{mín} & x^2 + 2y + 6z \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

(a) Demuestre que el problema (P) tiene solución.

(b) Determine todos los puntos que satisfacen las condiciones de optimalidad de Lagrange e indique su multiplicador correspondiente.

(c) Decida cuál de los puntos encontrados en el inciso anterior es la solución del problema (P). £Qué puede decir de los demás candidatos encontrados?

(d) Sea (x^*, y^*, z^*) la solución del problema de (P) y sea λ^* su multiplicador de Lagrange correspondiente. Llamemos

$$f(x, y, z) := x^2 + 2y + 6z \quad \text{y} \quad g(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Calcule la siguiente matriz e indique si es (semi)definida positiva o negativa:

$$A = H_f(x^*, y^*, z^*) - \lambda^* H_g(x^*, y^*, z^*).$$

P4. Encuentre la distancia mínima del plano

$$x + y + z = 1$$

al punto $(2, 1, 1)$.

P5. Considere la función definida por $\varphi(x, y) = 3x - x^3 - 3y^2$ y el subconjunto del plano

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 \leq 9\}.$$

(a) Clasifique los puntos críticos de φ (mínimo relativo, máximo relativo, silla) que se encuentran en el interior de K.

(b) Encuentre los valores máximo y mínimo de φ en K junto con los puntos del plano en donde estos valores se alcanzan.

Resumen

- **[Minimos y maximos local]**
Un punto $x_0 \in A$ es un mínimo local (máximo local, respectivamente) para f en A si existe $r > 0$ tal que, para todo $x \in B(x_0, r) \cap A$,
$$f(x) \geq f(x_0). \quad (f(x) \leq f(x_0) \text{ respectivamente.})$$

- **[Minimos y maximos global]**
Un punto $x_0 \in A$ es un mínimo global (máximo global, respectivamente) para f en A si para todo $x \in A$,
$$f(x) \geq f(x_0). \quad (f(x) \leq f(x_0) \text{ respectivamente.})$$

- **[Minimos y maximos en funciones continuas]**
Toda función continua f definida sobre un compacto A de $\mathbb{R}^d$ y a valores reales alcanza su mínimo y máximo en A.

- **[Punto critico]** Un punto $x_0 \in A$ para el cual f es diferenciable y además
$$\nabla f(x_0) = 0 \tag{1}$$
se denomina *punto crítico* de f.

- **[Test de la segunda derivada]** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de clase C^2 en A abierto, y $x_0 \in A$ un punto crítico de f. Si $f''(x_0)$ es definida positiva (negativa), entonces x_0 es un mínimo local (máximo local) de f.

- **[Lagrange]**
Sean $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 en $\mathbb{R}^d$. Sea S el conjunto de restricciones definidas por g, es decir,
$$S := \{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) = 0\}.$$
Supongamos además que x_0 es un mínimo (máximo) local para f en S, y que $\nabla g(x_0) \neq 0$. Entonces existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que
$$\nabla f(x_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0). \tag{3.113}$$
Al escalar λ_0 se le denomina *multiplicador de Lagrange*.