**MA2001-1 Cálculo en Varias Variables**
**Profesor:** Javier Ramírez Ganga.
**Auxiliar:** Anaís Muñoz P.

# Auxiliar 8:Pre Control 2!

9 de enero 2025

**P1.** Sea $\alpha > 0$ un parámetro real. Se define la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por la siguiente fórmula:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + xy^2}{(x^2+y^2)^\alpha}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Estudie la continuidad de $f$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Estudie la continuidad de $f$ en $(0,0)$.
3. Encuentre, si existen, las derivadas parciales de $f$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
4. Encuentre, si existen, las derivadas parciales de $f$ en $(0,0)$.
5. Estudie la diferenciabilidad de $f$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
6. Estudie la diferenciabilidad de $f$ en $(0,0)$.

**P2.** Calcule la derivada direccional de la función

$$f(x,y,z) = 2x^2 + 6xy + y^2 - 5yz + z^2$$

en el punto $(1,1,1)$ en la dirección de $\nabla f(1,1,1)$.

**P3.** Considerando la siguiente funcion:

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y\sin(xy^2)}{(x^6+y^6)}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Determine si existen las derivadas parciales en el punto $(0,0)$
(b) Determine si existen las derivadas direccionales en el punto $(0,0)$
(c) Determine si la funcion es diferenciable

**P4.** Considere la superficie definida por la ecuación:

$$\ln(z) + (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$$

(a) Determine la ecuación del plano tangente a la superficie en cada punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
(b) Dos vectores son paralelos si existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\vec{v}_1 = \lambda \vec{v}_2,$$

donde $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son vectores en $\mathbb{R}^n$.

Determine la condición que debe satisfacer $\lambda$ para que los puntos pertenecientes a la superficie definida por:

$$\ln(z) + (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0,$$

generen un plano tangente paralelo al plano tangente de la ecuación:

$$z = x + y.$$

**Nota:** No es requerido que encuentre $\lambda$ explícitamente, solo que exprese la condición a satisfacer.

(c) Calcule las derivadas parciales de segundo de la funcion que define la superficie y justifique si $f$ es de clase $C^2$.

**P5.** Sea $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, con $u$ y $v$ de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$. Se dice que $f$ verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann si

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Pruebe que al considerar el cambio de variable $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Entonces $f$ verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann.