

MA2001-1 Cálculo en Varias Variables**Profesor:** Javier Ramírez Ganga.**Auxiliar:** Anaís Muñoz P.**GuiaPreC2: Diferenciabilidad, cadena, gradiente y plano tangente.**

5 de enero 2025

Nota: Animo con el estudio <3**1. Diferenciabilidad****P1.** Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{-3xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Calcule las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en todo punto si $(x, y) \neq (0, 0)$.
- (b) Calcule las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ para $(x, y) = (0, 0)$.
- (c) Muestre que f no es continua.

P2. Definimos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(x + y) \\ e^{xy} + 2 \\ x^3y - 2xy^2 + \ln(x) \end{pmatrix}$$

Calcule el jacobiano de f .**P3.** Considere la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2 - 3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Determine si f es continua en $\mathbb{R}^2$
- (b) Calcule, si es posible, las derivadas parciales de f en $(0, 0)$.
- (c) Calcule, si es posible, las derivadas direccionales de f en $(0, 0)$.
- (d) Determine si f es diferenciable en $(0, 0)$.

2. Cadena**P4.** Sea $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y $a, b, c \in \mathbb{R}$ constantes. Considere la siguiente ecuación sobre u :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Pruebe que si $ac - b^2 > 0$, entonces, el cambio de variable

$$s(x, y) = \frac{cx - by}{\sqrt{ac - b^2}}, \quad t(x, y) = y$$

Transforma la ecuación original en:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

P5. Verifique que la función:

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

Satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

P6. Sean $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ funciones diferenciables y sea $h = f \circ g$ suponiendo

$$Df(g(0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Dg(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Encuentre $\partial_{x_3} h_2(0)$

P7. (a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \in C^2$, que satisface la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$$

Sean $u(x, y), v(x, y)$ funciones diferenciables que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

Demuestre que la función:

$$g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$$

también satisface la ecuación de Laplace.

(b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 que satisface:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Muestre que una función $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y)) = g(x + y, x - y)$$

Satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = 0$$

3. Gradiente y plano tangente

P8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ diferenciable en $(1, 2)$ con $D_v f(1, 2) = -5$ y $D_w f(1, 2) = 10$ y donde u, w son direcciones fijas definidas por:

$$v = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \wedge w = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- (a) Encuentre $\nabla f(1, 2)$ y si existe, la dirección de máximo crecimiento de f en $(1, 2)$.
- (b) Escriba explícitamente la ecuación del plano tangente a la superficie en $\mathbb{R}^3$ definida por: $f(x, y) = z$ sabiendo que $f(1, 2) = 0$.

P9. Sea $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$, se define $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ a la función dada por:

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$$

Encuentre la ecuación del plano tangente para todos los puntos (x, x) .

P10. Encuentre el vector normal unitario $\hat{n}(x_0, y_0, z_0)$ a la superficie:

$$x^2 + y^2 = \cosh(z)$$

para un punto (x_0, y_0, z_0) cualquiera de esta. Encuentre la ecuación del plano tangente a dicha superficie en el punto $\left(\frac{e}{2}, \frac{1}{2e}, 1\right)$.

P11. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Considere la superficie:

$$z = xf\left(\frac{x}{y}\right)$$

Pruebe que el plano tangente a la superficie en cualquier punto (x_0, y_0, z_0) en la superficie, contiene al origen.

P12. Considere la superficie H^+ definida por:

$$H^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 = 1, z > 0\}$$

- (a) Encuentre una función f tal que $Gr(f) = H^+$.
- (b) Pruebe que el plano tangente a H^+ está dado por la ecuación:

$$z_0 z - x_0 x - y_0 y = 1$$

- (c) Encuentre todos los puntos $(x_0, y_0, z_0) \in H^+$ tal que el plano tangente en dicho punto sea paralelo al plano OXY .

P13. Considere la superficie dada por $z = \ln(2x + y)$ y el paraboloide de la ecuación $z = 5 + (x - 1)^2 + (y + 2)^2$.

Determine la ecuación de la recta dada por la intersección de los planos tangentes a las superficies en los puntos $(-1, 3, 0)$ y $(2, 0, 10)$.

- P14.** (a) Encuentre las direcciones de máximo ascenso y descenso de la función en $(0,0,0)$:

$$f(x, y, z) = e^{x^2 + \sin(z)} + \sqrt{1 + x + y}$$

- (b) La temperatura de una lámina metálica centrada en el plano XY está dada por la función $T(x, y)$ definida por:

$$T(x, y) = \frac{3x}{x^2 + y^2}$$

Partiendo del punto $P(2,1)$:

- (I) Defina la dirección en la cual la tasa de incremento de la temperatura es máxima.
- (II) Calcule la tasa de variación (derivada direccional) en la dirección del vector unitario $(\cos(\frac{\pi}{4}), \sin(\frac{\pi}{4}))$