MA2001-1 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Javier Ramírez Ganga.
Auxiliar: Anaís Muñoz P.

Capsula 10: Cadena.

5 de enero 2025

P1. Considere el cambio a coordenadas parabólicas:

$$x = \frac{u^2 - v^2}{2}, \quad y = uv$$

Muestre que si se define $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$, con f de clase C^2, entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{u^2 + v^2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$$

Resumen

- **[Regla de la cadena]** Sean $f : A \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ y $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Si f es diferenciable en x_0 y g en $f(x_0)$, entonces $g \circ f : A \to \mathbb{R}^q$ es diferenciable en x_0, y se cumple:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

- **[Regla de la cadena, segunda versión]** Sean $f : A \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ y $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, con f diferenciable en x_0 y g en $f(x_0)$. Para $F = g \circ f$, diferenciable en x_0, se cumple:

$$\frac{\partial F_\ell}{\partial x_m}(x_0) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_\ell}{\partial y_k}(f(x_0))\frac{\partial f_k}{\partial x_m}(x_0),$$

donde $g = g(y_1, \ldots, y_p)$.