MA2001-1 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Javier Ramírez Ganga.
Auxiliar: Anaís Muñoz P.

Capsula 8: Cadena (Version simple).

5 de enero 2025

P1. Considere las funciones:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$t \to f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to g(x,y,z) = \cos(x-y)e^{z^2}$$

Definimos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $h(t) = g(f(t))$.
Calcule $h'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

P2. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ son funciones diferenciables en $(1,2)$ y en $f(1,2) = (1,2,3)$ respectivamente, se sabe además que:

$$Df(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Dg(1,2,3) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si se define $h(x,y) = g(f(x,y))$, calcule:

$$\frac{\partial h_2}{\partial y}(1,2)$$

Resumen

- **[Regla de la cadena]** Sean $f : A \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ y $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Si f es diferenciable en x_0 y g en $f(x_0)$, entonces $g \circ f : A \to \mathbb{R}^q$ es diferenciable en x_0, y se cumple:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

- **[Regla de la cadena, segunda versión]** Sean $f : A \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ y $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, con f diferenciable en x_0 y g en $f(x_0)$. Para $F = g \circ f$, diferenciable en x_0, se cumple:

$$\frac{\partial F_\ell}{\partial x_m}(x_0) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_\ell}{\partial y_k}(f(x_0))\frac{\partial f_k}{\partial x_m}(x_0),$$

donde $g = g(y_1, \ldots, y_p)$.