MA2001-1 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Javier Ramírez Ganga.
Auxiliar: Anaís Muñoz P.

Capsula 6: Diferenciabilidad.

5 de enero 2025

P1. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(x,y) = \begin{bmatrix} xy^3 + x^2y \\ y^2 \end{bmatrix}$$

Demuestre que la derivada de g existe en $(0,1) \in \mathbb{R}^2$ y viene dada por

$$Dg((0,1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Hint: Considere la desigualdad $|hk| + k^2 \leq 2(h^2+k^2)$.

Resumen

- **[Derivada en varias variables]**
Decimos que f es **diferenciable** en x_0 si existe una matriz de p filas y d columnas tal que para todo h, se tiene la descomposición
$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + r(h),$$
donde $r(h) \in \mathbb{R}^p$ satisface
$$\lim_{h\to 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0.$$
Por último, diremos que f es diferenciable en A si lo es en cada punto de A.

- **[Unicidad en f diferenciable]**
Si f es diferenciable en x_0, entonces su derivada $f'(x_0)$ es única.

- **[Continuidad en f diferenciable]**
Si f es diferenciable en x_0, entonces f es continua en x_0.