pauta guia control 2

Animo!

P1. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-3xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Calcule las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en todo punto si $(x,y) \neq (0,0)$.

(b) Calcule las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ para $(x,y) = (0,0)$.

(c) Muestre que f no es continua.

a. Como la funcion es dif en ese punto, es directo que:

- $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-3xy}{x^2+y^2}\right)$$

$$= -3y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

$$= -3y\left(\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$= \frac{-3y(x^2+y^2)+6x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Analogamente

- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-3x(x^2+y^2)+6xy^2}{(x^2+y^2)^2}$

b. devemos obtenerla por definicion

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f((0,0)+t(1,0)) - \cancel{f(0,0)}^{\,0}}{t}$

$= \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t,0)}{t}$

$= \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{0}{t} = 0$

- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f((0,0)+t(0,1)) - \cancel{f(0,0)}^{\,0}}{t}$

$= \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(0,t)}{t}$

$= \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{0}{t} = 0$

C. en $(x,y) \neq (0,0)$ es continua por algebra y composicion de funciones continuas

↳ Veremos que la continuidad falla en $(0,0) = (x,y)$

tomamos $(x_n, y_n) = (1/n, 1/n)$

notamos que:

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{n \to \infty} (0,0)$$

luego, se tiene:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{(-3)(1/n)(1/n)}{(1/n)^2 + (1/n)^2}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{-3\cancel{(1/n)^2}}{2\cancel{(1/n)^2}}$$

$$= \frac{-3}{2} \neq 0$$

$\therefore$ f no es continua

P2. Definimos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ por:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(x+y) \\ e^{xy}+2 \\ x^3y - 2xy^2 + \ln(x) \end{pmatrix}$$

Calcule el jacobiano de f.

Se tiene

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \operatorname{Sen}(x+y) \\ e^{xy}+2 \\ x^3y - 2xy^2 + \ln(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \\ f_3(x,y) \end{pmatrix}$$

↪ Es una funcion a coordenadas

→ Calculamos las derivadas involucradas.

- $\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = \cos(x+y)$
- $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \cos(x+y)$
- $\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = ye^{xy}$
- $\dfrac{\partial f_2}{\partial y} = xe^{xy}$
- $\dfrac{\partial f_3}{\partial x} = 3x^2y - 2y^2 + \dfrac{1}{x}$
- $\dfrac{\partial f_3}{\partial y} = x^3 - 4xy$

luego, el Jacobiano es:

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ ye^{xy} & xe^{xy} \\ 3x^2y - 2y^2 + \frac{1}{x} & x^3 - 4xy \end{pmatrix}$$

P3. Considere la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2-3x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a) Determine si f es continua en $\mathbb{R}^2$

(b) Calcule, si es posible,las derivadas parciales de f en $(0,0)$.

(c) Calcule, si es posible, las derivadas direccionales de f en $(0,0)$.

(d) Determine si f es diferenciable en $(0,0)$.

a. para $(x,y)\neq(0,0)$, es directo que $f(x,y)$ es continua por algebra y composicion de funciones continuas

→ Analizamos para $(x,y)=(0,0)$

$$|f(x,y)| = \left|\frac{xy^2-3x^2y}{x^2+y^2}\right|$$

$$\leq \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right|$$

trabajando en polares

$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$\leq \left|\frac{r^3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta}{r^2(\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\theta)}\right| + \left|\frac{3r^3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^2(\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\theta)}\right|$$

$$\leq |r\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta| + |3r\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta|$$

$$\leq |r| + 3|r| \xrightarrow[r \to 0]{} 0$$

$\therefore f$ es continua en el origen y por lo tanto es continua en $\mathbb{R}^2$

b. debemos calcular por definicion:

$$D_v f(\bar{x},\bar{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{f((\bar{x},\bar{y}) + h(v_1,v_2)) - f(\bar{x},\bar{y})}{h}$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{0-0}{h^2} - 0}{h} = 0$$

$\rightarrow$ Analogamente:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

c. Tomamos una direccion arbitraria

Sea $u = (u_1, u_2)$ una direccion, es decir:
$u_1^2 + u_2^2 = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((0,0) + h(u_1, u_2)) - f(0,0)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(u_1 h, u_2 h) - f(0,0)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{h^3 u_1 u_2^2 - 3h^3 u_1^2 u_2}{h^2 u_1^2 + h^2 u_2^2} \right)$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{u_1 u_2^2 - 3 u_1^2 u_2}{u_1^2 + u_2^2} \right)$$

$$= u_1 u_2^2 - 3 u_1^2 u_2$$

$\therefore$ las derivadas direccionales existen en todas las direcciones.

d. Como ya tenemos un posible diferencial, procedemos por definicion

$$Df(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\| f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0) \cdot h \|}{\| h \|} = 0.$$

→ Vamos a trabajar con una direccion $y = mx \quad x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,mx) - Df(0,0)\cdot(x \quad mx)}{\|(x, mx)\|}$$

Con $Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,mx) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ xm \end{pmatrix}}{\|(x, mx)\|}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{m^2x^3 - 3x^3m}{x^2+x^2m^2}}{\sqrt{x^2+x^2m^2}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{m^2x - 3mx}{|x|(1+m^2)^{3/2}}$$

↳ Como este valor depende de m

∴ f no es diferenciable !

P4. Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y $a, b, c \in \mathbb{R}$ constantes. Considere la siguiente ecuación sobre u:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Pruebe que si $ac - b^2 > 0$, entonces, el cambio de variable

$$s(x, y) = \frac{cx - by}{\sqrt{ac - b^2}}\ ,\ t(x, y) = y$$

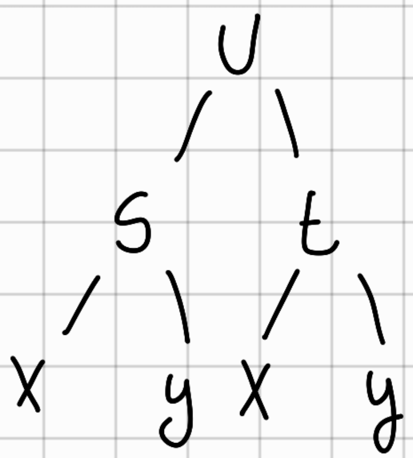
Transforma la ecuación original en:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Se tiene que el cambio de variable esta planteado de la forma:

$$U(s(x,y), t(x,y))$$

Con ello, el arbolito sera de la forma:



de donde obtenemos:

- $$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial U}{\partial s} \frac{c}{\sqrt{ac - b^2}}$$

- $$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}$$

$$= -\frac{\partial U}{\partial s}\frac{b}{\sqrt{ac-b^2}} + \frac{\partial U}{\partial t}$$

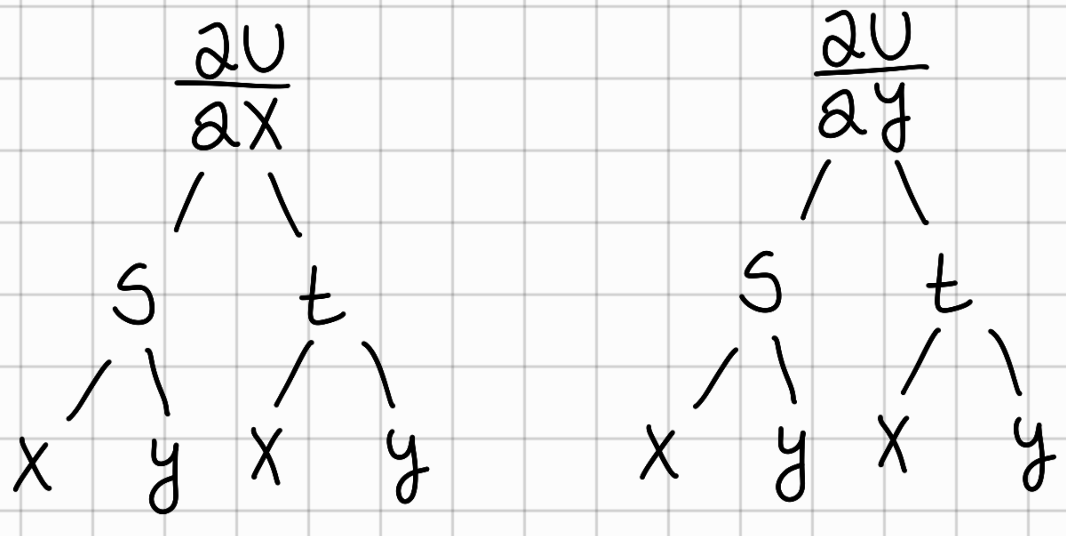
$\longrightarrow$ para las derivadas de segundo orden se tiene que como

$U(s(x,y), t(x,y))$

$\hookrightarrow \frac{\partial U}{\partial x}(s(x,y), t(x,y))$

$\hookrightarrow \frac{\partial U}{\partial y}(s(x,y), t(x,y))$

Por lo que los "arbolitos" quedarian :



Calculamos :

- $$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial U}{\partial s}\frac{c}{\sqrt{ac-b^2}}\right)$$

$$= \frac{c}{\sqrt{ac-b^2}}\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)\frac{\partial s}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)\cancelto{0}{\frac{\partial t}{\partial X}}\right)$$

$$= \frac{c^2}{ac-b^2}\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}$$

- $$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial U}{\partial s}\frac{b}{\sqrt{ac-b^2}} + \frac{\partial U}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{-b}{\sqrt{ac-b^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)$$

↳ Calculamos "Aparte"

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)\cdot\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\left(\frac{-b}{\sqrt{ac-b^2}}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial s}$$

Analogamente

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial s\,\partial t}\left(\frac{-b}{\sqrt{ac-b^2}} + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)$$

Por lo tanto, remplazando y simplificando:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{b^2}{ac-b^2}\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} - \frac{2b}{\sqrt{ac-b^2}}\frac{\partial^2 U}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

→ Como la funcion es C^2 basta calcular una de las derivadas parciules cruzadas.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c}{\sqrt{ac-b^2}}\frac{\partial U}{\partial s}\right)$$

$$= \frac{c}{\sqrt{ac-b^2}}\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)\cdot\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)\frac{\partial t}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{c}{\sqrt{ac-b^2}}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\frac{-b}{\sqrt{ac-b^2}} + \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial s}\right)$$

→ basta remplazar todo lo obtenido en la ecuacion del enunciado!

P5. Verifique que la función:

$$f(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2}$$

Satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

Calculando:

- $$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1\cdot(x^2+y^2)-(x+y)2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x^2+y^2-2x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{(-2x-2y)(x^2+y^2)^2-(-x^2-2xy+y^2)2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4}$$

de forma analoga:

- $$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{(-2x-2y)(x^2+y^2)^2-(x^2-2xy-y^2)2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)}$$

basta remplazar y factorizar para obtener lo pedido:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-(2x+2y)(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4}$$

$$+\frac{4x(x^2+2xy-y^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$-\frac{(2x+2y)(x^2+y^2)^2-4y(x^2-2xy-y^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

donde notando que:

- $[4x(x^2+2xy-y^2)-4y(x^2-2xy-y^2)](x^2+y^2)$

$= [4x^3+8x^2y-4xy^2-4yx^2+8xy^2+4y^3](x^2+y^2)$

$= [4x^3+4x^2y+4y^2x+4y^3](x^2+y^2)$

$= 4[x^3+x^2y+y^2x+y^3](x^2+y^2)$

y por otro lado:

$$\cdot\ -2(2x+2y)(x^2+y^2)^2$$

$$= -4(x+y)(x^2+y^2)^2$$

$$= -4(x+y)(x^2+y^2)(x^2+y^2)$$

$$= -4(x^3+xy^2+yx^2+y^3)(x^2+y^2)$$

Remplazando:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$=\frac{\left[\cancel{4(x^3+x^2y+xy^2+y^3)}-\cancel{4(x^3+xy^2+yx^2+y^3)}\right](x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

de donde finalmente:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

Que es lo pedido!

P6. Sean $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ y $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ funciones diferenciables y sea $h=f\circ g$ suponiendo

$$Df(g(0))=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&2&3\\2&3&1&0\end{pmatrix}$$

$$Dg(0)=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&3&0\\-1&3&-1\\1&3&2\end{pmatrix}$$

Encuentre $\partial_{x3}h_2(0)$

Por cadena es facil notar que:

$$Dh(\vec{0}) = Df(g(\vec{0}))\cdot Dg(\vec{0})$$

basta remplazar:

$$Dh(\vec{0}) = \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&2&3\\2&3&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\1&3&0\\-1&3&-1\\1&3&2\end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ notar que no es necesario hacer toda la multiplicacion! ya que

$$\underbrace{f:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^3 \qquad g:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^4}_{h:\ \mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3}$$

lo que implica

$$Dh = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial h_3}{\partial x_1} & \frac{\partial h_3}{\partial x_2} & \frac{\partial h_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

buscamos este !

Asi, Solo es necesario notar que

$$Dh(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x_3}(\vec{0}) = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot -1 + 3 \cdot 2$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x_3}(\vec{0}) = -2 + 6 = 4$$

$$\therefore \frac{\partial h_2}{\partial x_3}(\vec{0}) = 4$$

//

P7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f \in C^2$, que satisface la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$$

Sean $u(x,y), v(x,y)$ funciones diferenciables que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

Demuestre que la función:

$$g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$$

también satisface la ecuación de Laplace.

notamos que

$$U(x,y) = x+y \quad , \quad v(x,y) = x-y$$

entonces:

$$\cdot\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

→ derivando nuevamente:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial U^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial U} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial^2 g}{\partial U \partial v} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial U^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial U} + \frac{\partial^2 g}{\partial U \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

Analogamente:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

luego, como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Remplazando lo obtenido, llegamos a:

$$2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\right) = 0$$

Como f es C^2, entonces u y v son C^2 y por lo tanto g es $C2$

luego, por swartz:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$$

por lo tanto

$$y \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$$

$\blacksquare$

P8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ diferenciable en $(1,2)$ con $D_v f(1,2) = -5$ y $D_w f(1,2) = 10$ y donde u, w son direcciones fijas definidas por:

$$v = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \wedge w = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) Encuentre $\nabla f(1,2)$ y si existe, la dirección de máximo crecimiento de f en $(1,2)$.

(b) Escriba explícitamente la ecuación del plano tangente a la superficie en $\mathbb{R}^3$ definida por: $f(x,y) = z$ sabiendo que $f(1,2) = 0$.

a. Como f es diferenciable tenemos

$$D_v f(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot v$$

$$D_w f(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot w.$$

↪ esto nos dara lugar a 2 ecuaciones.

Tomaremos un gradiente arbitrario

$$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

→ remplazando:

1. $$D_v f(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot v$$

$$-5 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$-25 = 3a - 4b.$$

2. $D_w f(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot w$

$$10 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$50 = 4a + 3b.$$

obtenemos el sgte sistema 2x2:

$$\begin{cases} -25 = 3a - 4b \\ 50 = 4a + 3b. \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Resolvemos

$$a = \frac{4b - 25}{3}$$

$$50 = 4 \cdot \frac{4b-25}{3} + 3b$$

$$150 = 16b - 100 + 9b.$$

$$250 = 25b \longrightarrow \boxed{b = 10}$$

luego $\boxed{a = 5}$

asi, tenemos

$$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

→ Ahora calculamos la direccion de maximo crecimiento.

está ~~esta~~ dada por:

$$\frac{\nabla f(1,2)}{\|\nabla f(1,2)\|}$$

→ remplazando

$$\frac{\nabla f(1,2)}{\|\nabla f(1,2)\|} = \frac{1}{\sqrt{5^2+10^2}} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{125}} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b. Sabemos que $f(1,2)=0$.

definimos

$$g(x,y,z) = f(x,y) - z$$

↪ g es diferenciable y se tiene que

$$g(1,2,0) = f(1,2) - 0 = 0$$

luego

$$\nabla g(1,2,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Utilizando la ecuación del plano tgte.

$$\nabla g(1,2,0) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z \end{pmatrix} = 0$$

de donde se obtiene:

$$5(x-1)+10(y-2)-z=0.$$

$$5x-5+10y-20-z=0$$

$$\boxed{5x+10y-z=25.}$$

ecuacion del plano tgte a f en $(1,2)$.

P9. Sea $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$, se define $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ a la función dada por:

$$f(x,y) = \sin(x^2+y^2)(x^2-y^2)$$

Encuentre la ecuación del plano tangente para todos los puntos (x,x).

Notar primero que las derivadas parciales estan definidas en todo $\mathbb{R}^2$

definiendo

$$g(x,y,z) = f(x,y) - z$$

$$g(x,y,z) = \operatorname{Sen}(x^2+y^2)(x^2-y^2) - z$$

$\longrightarrow$ Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x\cos(x^2+y^2)(x^2-y^2) + 2x\operatorname{Sen}(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y\cos(x^2+y^2)(x^2-y^2) - 2y\operatorname{Sen}(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -1$$

la formula del plano tangente sera

$$\langle \nabla g(X_0), \vec{X} - X_0 \rangle$$

nos damos un vector

$$\vec{X_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ Como (x, y) debe pertenecer a Ω
Se tendra que

$$(x_0, y_0) = (a, a) \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}$$

y ademas se debe tener

$$g(x, y, z) = \operatorname{Sen}(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) - z = 0$$

$\hookrightarrow$ Remplazando $(x_0, y_0) = (a, a)$
Se obtiene $z_0 = 0$, asi

$$\vec{X_0} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

luego

$$\nabla g(a,a,0) = \begin{pmatrix} 2a\,\text{sen}(2a^2) \\ -2a\,\text{sen}(2a^2) \\ -1 \end{pmatrix}$$

Remplazando todo en la formula de plano tangente

el plano tangente vendra dado por:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2a\,\text{sen}(2a^2) \\ -2a\,\text{sen}(2a^2) \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-a \\ y-a \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Asi, el plano tangente es:

$$z = (x-a)\,2a\,\text{sen}(2a^2) - (y-a)\,2a\,\text{sen}(2a)$$

//

P10. Encuentre el vector normal unitario $\hat{n}(x_0, y_0, z_0)$ a la superficie:

$$x^2 + y^2 = \cosh(z)$$

para un punto (x_0, y_0, z_0) cualquiera de esta. Encuentre la ecuación del plano tangente a dicha superficie en el punto $\left(\frac{e}{2}, \frac{1}{2e}, 1\right)$.

1. vector normal

escribimos

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - \cosh(x)$$

luego, el vector normal a la superficie en (x_0, y_0, z_0) sera

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 2y_0, -\operatorname{senh}(z_0))$$

↳ pero necesitamos normalizarlo:

$$\hat{n}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\nabla F(x_0, y_0, z_0)}{\|\nabla F(x_0, y_0, z_0)\|}$$

$$\|\nabla F(x_0, y_0, z_0)\| = 4x_0^2 + 4y_0^2 + \operatorname{senh}^2(z_0)$$

y finalmente

$$\hat{n}(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4x_0^2 + 4y_0^2 + \operatorname{senh}^2(z_0)}(2x_0, 2y_0, -\operatorname{senh}(z_0))$$

Que es lo pedido!

2. Plano tangente

ademas, la ec. del plano tangente esta dado por:

$$\langle \vec{X} - \vec{X_0}, \nabla F \rangle = 0$$

Remplazando:

$$\left\langle \begin{pmatrix} X - X_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2X_0 \\ 2y_0 \\ -\operatorname{Senh}(z_0) \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$(X - X_0)2X_0 + (y - y_0)2y_0 - (z - z_0)\operatorname{Senh}(z_0) = 0$$

$$2X_0X - 2X_0^2 + 2y_0y - 2y_0^2 - \operatorname{Senh}(z_0)z + \operatorname{Senh}(z_0)z_0 = 0$$

$$2X_0X + 2y_0y - \operatorname{Senh}(z_0)z - (2X_0^2 + 2y_0^2 - \operatorname{Senh}(z_0)z_0) = 0$$

para el punto $\left(\frac{e}{2}, \frac{1}{2e}, 1\right)$

$$ex + \frac{y}{e} - \left(\frac{e^2-1}{2e}\right)z - \left(\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2e^2} - \frac{e^2-1}{2e}\right) = 0.$$

Que es lo pedido! >-<

P11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Considere la superficie:

$$z = xf\left(\frac{x}{y}\right)$$

Pruebe que el plano tangente a la superficie en cualquier punto (x_0, y_0, z_0) en la superficie, contiene al origen.

definiendo :

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xf\left(\frac{x}{y}\right) - z = 0\}$$

llamando

$$f = xf\left(\frac{x}{y}\right) - z$$

el vector normal a la superficie sera el gradiente.

$$N = \nabla f(x,y,z)$$

$$N = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Calculando

$$N = \left(f\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y} f'\left(\frac{x}{y}\right), -\frac{x^2}{y^2} f'\left(\frac{x}{y}\right), -1\right)$$

Ahora, con eso, buscamos el plano tangente!, el cual esta dado por:

$$\langle \vec{X} - X_0 , N \rangle$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} f\left(\frac{x_0}{y_0}\right) + \frac{x_0}{y_0} f'\left(\frac{x_0}{y_0}\right) \\ -\frac{x_0^2}{y_0^2} f'\left(\frac{x_0}{y_0}\right) \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(x - x_0)\left(f\left(\frac{x_0}{y_0}\right) + \frac{x_0}{y_0} f'\left(\frac{x_0}{y_0}\right)\right) + (y - y_0)\left(-\frac{x_0^2}{y_0^2} f'\left(\frac{x_0}{y_0}\right)\right) - (z - z_0) = 0$$

$$(z - z_0) = (x - x_0)\left(f\left(\frac{x_0}{y_0}\right) + \frac{x_0}{y_0} f'\left(\frac{x_0}{y_0}\right)\right) + (y - y_0)\left(-\frac{x_0^2}{y_0^2} f'\left(\frac{x_0}{y_0}\right)\right)$$

desarrollando

$$z - z_0 = x\left(f\left(\frac{x_0}{y_0}\right) + \frac{x_0}{y_0} f'\left(\frac{x_0}{y_0}\right)\right) - x_0 f\left(\frac{x_0}{y_0}\right) \cancel{- \frac{x_0^2}{y_0} f'\left(\frac{x_0}{y_0}\right)}$$

$$- y \frac{x_0^2}{y_0^2} f'\left(\frac{x_0}{y_0}\right) \cancel{+ \frac{x_0^2}{y_0} f'\left(\frac{x_0}{y_0}\right)}$$

notando que

$$z_0 = x_0 f\left(\frac{x_0}{y_0}\right)$$

$$z - \cancel{z_0} = x\left(f\left(\frac{x_0}{y_0}\right) + \frac{x_0}{y_0} f'\left(\frac{x_0}{y_0}\right) - \cancel{z_0} - y\frac{x_0^2}{y_0^2} f'\left(\frac{x_0}{y_0}\right)\right.$$

finalmente, el plano tangente es:

$$z = x\left(f\left(\frac{x_0}{y_0}\right) + \frac{x_0}{y_0} f'\left(\frac{x_0}{y_0}\right)\right) - y\frac{x_0^2}{y_0^2} f'\left(\frac{x_0}{y_0}\right)$$

ademas, $(0,0,0)$ pertenece al plano tangente! que es lo pedido!

P12. Considere la superficie H^+ definida por:

$$H^+ = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 = 1,\ z > 0\right\}$$

(a) Encuentre una función f tal que $Gr(f) = H^+$.

(b) Pruebe que el plano tangente a H^+ está dado por la ecuación:

$$z_0 z - x_0 x - y_0 y = 1$$

(c) Encuentre todos los puntos $(x_0, y_0, z_0) \in H^+$ tal que el plano tangente en dicho punto sea paralelo al plano OXY.

a. Recordemos que el grafo de una funcion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ está dado por el conjunto:

$$Gr(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : f(x) = y\}$$

Por lo que, escribimos H^+ como:

$$z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

definiendo

$$f(x, y) = z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

Tendremos lo pedido

$$Gr(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y) = z\}$$

b. Si definimos

$$g(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2 - 1$$

entonces, el plano tangente estara dado por

$$\nabla g(\vec{X_0})(\vec{X} - \vec{X_0}) = 0$$

$\longrightarrow$ Calculamos $\nabla g(X_0)$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 2z$$

Asi:

$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

luego, para un punto (x_0, y_0, z_0) el plano tangente vendrá dado por:

$$\nabla g(\vec{x_0}) \cdot (x - x_0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2x_0 \\ -2y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$-2x_0(x - x_0) - 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0$$

$$2x_0^2 - 2x_0 x + 2y_0^2 - 2y_0 y - 2z_0^2 + 2z_0 z = 0$$

pero, como $(x_0, y_0, z_0) \in H^+$, entonces:

$$2x_0^2 + 2y_0^2 - 2z_0^2 = -2$$

Remplazando

$$2z_0 z - 2x_0 x - 2y_0 y - 2 = 0$$

$$z_0 z - x_0 x - y_0 y = 1.$$

Que es el resultado deseado.

C. Para que 2 planos sean paralelos, sus vectores normales deben ser paralelos!

el vector normal del plano OXY es:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

para el plano tangente, el vector normal en X_0 es

$$\nabla g(X_0)$$

luego, imponemos que sean paralelos:

$$\nabla g(X_0) = \begin{pmatrix} -2x_0 \\ -2y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para algun λ, lo cual es equivalente a

$$x_0 = y_0 = 0$$

luego, se tendra

$$z_0 = \frac{\lambda}{2}$$

Por lo que el punto sera $(0, 0, z_0)$

Pero, recordando que el punto pertenece a H^+, entonces

$$z_0^2 - x_0^2 - y_0^2 = 1$$

con $x_0 = y_0 = 0$

$$z_0^2 = 1$$

y como ademas $z_0 > 0$

$$z_0 = 1$$

$\therefore$ el unico punto es

$$(0, 0, 1)$$

P13. Considere la superficie dada por $z = \ln(2x+y)$ y el paraboloide de la ecuacion $z = 5 + (x-1)^2 + (y+2)^2$.
Determine la ecuacion de la recta dada por la interseccion de los planos tangentes a las superficies en los puntos $(-1,3,0)$ y $(2,0,10)$.

buscamos los planos tangentes

definimos $g(x,y,z) = \ln(2x+y) - z$

luego

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \frac{1}{2x+y} \cdot 2 \\ \frac{1}{2x+y} \\ -1 \end{pmatrix}$$

en el punto $(-1, 3, 0)$ la ec esta dada por

$$\langle \nabla g(-1,3,0), (\vec{x} - \vec{x_0}) \rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x+1 \\ y-3 \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$2(x+1) + y - 3 - z = 0$$

$$2(x+1) + y - 3 = z.$$

buscamos el 2do plano tangente!

$$S(x,y,z) = 5+(x-1)^2+(y+2)^2-z$$

$$\nabla S = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y+2) \\ -1 \end{pmatrix}$$

luego, el plano tangente sera

$$\langle \nabla S(x_0), \vec{x}-\vec{x_0} \rangle = 0$$

para este caso $x_0 = (2,0,10)$

Remplazando:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z-10 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$2(x-2)+4y-(z-10)=0$$

$$2x-4+4y-z+10=0$$

$$z = 10+2(x-2)+4y$$

luego, intersectando los planos tangentes

$$2(x+1) + y - 3 = 10 + 2(x-2) + 4y$$

$$y = -\frac{7}{3}$$

Remplazando en cualquier ec de plano tangente

$$z = 2(x+1) - \frac{7}{3} - 3$$

Que es lo pedido !

P14. (a) Encuentre las direcciones de máximo ascenso y descenso de la función en (0,0,0):

$$f(x, y, z) = e^{x^2+\sin(z)} + \sqrt{1 + x + y}$$

(b) La temperatura de una lámina metálica centrada en el plano XY está dada por la función $T(x, y)$ definida por:

$$T(x, y) = \frac{3x}{x^2 + y^2}$$

Partiendo del punto P(2,1):

(I) Defina la dirección en la cual la tasa de incremento de la temperatura es máxima.

(II) Calcule la tasa de variación (derivada direccional) en la dirección del vector unitario $(\cos(\frac{\pi}{4}), \sin(\frac{\pi}{4}))$

a Calculamos derivadas parciales de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2+\operatorname{sen} z}\, 2x + \frac{1}{2\sqrt{1+x+y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{1+x+y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^{x^2+\operatorname{sen} z} \cos(z)$$

Animo

→ Recordando que

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

luego, el gradiente en $(0,0,0)$ es

$$\nabla f(0,0,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

luego, calculamos el vector direccion para el gradiente en ese punto, por lo qué se tiene:

→ maximo ascenso:

$$\frac{\nabla f(0,0,0)}{\|\nabla f(0,0,0)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)$$

$$\|\nabla f(0,0,0)\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}$$

→ maximo descenso:

$$\frac{-\nabla f(0,0,0)}{\|\nabla f(0,0,0)\|} = -\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$$

(b) La temperatura de una lámina metálica centrada en el plano XY está dada por la función T(x,y) definida por:

$$T(x,y) = \frac{3x}{x^2+y^2}$$

Partiendo del punto P(2,1):

(I) Defina la dirección en la cual la tasa de incremento de la temperatura es máxima.

(II) Calcule la tasa de variación (derivada direccional) en la dirección del vector unitario $(cos(\frac{\pi}{4}), sen(\frac{\pi}{4}))$

i) Repetimos el mismo procedimiento del ejercicio anterior

$\longrightarrow$ Calculamos derivadas parciales

- $$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{3(x^2+y^2) - 6x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

- $$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{-6xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$\longrightarrow$ Calculando gradiente en el punto p(2,1)

$$\nabla f(2,1) = \left(\frac{-9}{25}, -\frac{12}{25}\right)$$

$\hookrightarrow$ luego, la direccion es maxima, en la misma direccion del gradiente

$$\hat{n} = \frac{\nabla f(2,1)}{\|\nabla f(2,1)\|} \quad [prop]$$

ii) nos piden la derivada direccional en la dirección del vector unitario $(\cos(\pi/4), \operatorname{sen}(\pi/4))$

$\longrightarrow$ Tomando

$$\hat{u} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$\hookrightarrow$ como sabemos que en este punto la funcion es derivable, usaremos que:

$$D_{\hat{u}} f(p) = \nabla f(p) \cdot \hat{u}$$

por lo anterior, ya sabiamos que

$$\nabla f(2,1) = \left(\frac{-9}{25}, \frac{-12}{25}\right)$$

Suerte!

$$D_{\hat{u}} f(p) = \begin{pmatrix} \frac{-9}{25} \\ \frac{-12}{25} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$D_{\hat{u}} f(p) = \frac{-9}{25}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{12}{25}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\boxtimes$