MA2001-1 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Javier Ramírez Ganga.
Auxiliar: Anaís Muñoz P.

Auxiliar 7:Cadena y plano tangente

5 de enero 2025

P1. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y la ecuación en derivadas parciales:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha\sqrt{x^2+y^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

El objetivo del problema es encontrar una solución a la ecuación.

a) Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

Muestre que si f es solución de la ecuación, g verifica:

$$\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\theta) = \alpha.$$

b) Encuentre una función g no polinomial que verifique lo anterior.

c) A partir de g, recupere una solución f para la ecuación original.

P2. Considere las funciones $\alpha, \beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\alpha(x,y) = \frac{1}{2}(x+y), \quad \beta(x,y) = \frac{1}{2}(x-y).$$

Sea f una función de clase C^2 donde, a partir de estas funciones, se define $g(x,y) = f(\alpha(x,y), \beta(x,y))$. Demuestre que:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

P3. Hallar la ecuación del plano tangente a cada superficie $z = f(x,y)$ en el punto indicado.

a) $z = x^3 + y^3 - 6xy$ en el punto $(1, 2, -3)$.

b) $z = \cos(x)\sin(y)$ en el punto $\left(0, \frac{\pi}{2}, 1\right)$.

P4. Consideremos la función:

$$f(x,y) = e^{ax+y^2} + b\sin(x^2+y^2).$$

Determinar los valores de a y b para que el plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el origen sea horizontal.

Resumen

- **[Regla de la cadena]** Sean $f : A \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ y $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Si f es diferenciable en x_0 y g en $f(x_0)$, entonces $g \circ f : A \to \mathbb{R}^q$ es diferenciable en x_0, y se cumple:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

- **[Regla de la cadena, segunda versión]** Sean $f : A \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ y $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, con f diferenciable en x_0 y g en $f(x_0)$. Para $F = g \circ f$, diferenciable en x_0, se cumple:

$$\frac{\partial F_\ell}{\partial x_m}(x_0) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_\ell}{\partial y_k}(f(x_0)) \frac{\partial f_k}{\partial x_m}(x_0),$$

donde $g = g(y_1, \ldots, y_p)$.

- **[Matriz Hessiana]** Supongamos que f escalar es dos veces diferenciable en $x_0 \in A$, con A abierto. Definimos su matriz Hessiana en x_0, o matriz de segundas derivadas de f (denotada $f''(x_0)$), como la matriz de segundas derivadas parciales de f en x_0, de tamaño reducido:

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_d}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_d}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

- **[Gradiente]** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x_0 \in A$, con A abierto. Definimos su gradiente en x_0, denotado $\nabla f(x_0)$, como el vector en $\mathbb{R}^d$ compuesto por las derivadas parciales en x_0:

$$\nabla f(x_0) := f'(x_0)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_d}(x_0) \end{pmatrix}.$$

- **[Hipersuperficie]** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en A abierto. Una hipersuperficie suave en $\mathbb{R}^d$, definida por f (denotada $S(f)$), es el conjunto de puntos (no vacío) $x \in \mathbb{R}^d$, soluciones de la ecuación

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_d) = 0, \quad x = (x_1, \ldots, x_d),$$

y donde además se satisface $\nabla f(x) \neq 0$ en tales puntos.

- **[Hiperplano tangente]** Sea $S = S(f)$ una hipersuperficie suave determinada por una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Sea también $x_0 \in S$. Definimos el hiperplano tangente a S en x_0 como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^d$ tales que

$$\nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) = 0.$$

- **[Funciones de clase C^k]** Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ posee todas sus segundas derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

continuas en A, entonces diremos que f es una función de clase C^2 en A.

De manera general, una función f se dirá de clase C^k en A, $k \geq 2$, si todas las derivadas parciales de orden $k-1$ de f poseen correspondientes derivadas parciales continuas en A.

Finalmente, una función se dirá de clase C^∞ si es de clase C^k para cualquier $k \geq 0$.

- **[Schwartz]** Si f es de clase C^2 en $A \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

para todo $(x, y) \in A$.