

MA2001-1 Cálculo en Varias Variables**Profesor:** Javier Ramírez Ganga.**Auxiliar:** Anaís Muñoz P.**Resumen 8: Integración**

5 de enero 2025

Resumen

- **[Corolario de Fubini]** Sea $R_1 \subseteq \mathbb{R}^d$ y $R_2 \subseteq \mathbb{R}^p$ dos rectángulos cerrados, y sea $f : R_1 \times R_2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces:

$$\begin{aligned} \int_{R_1 \times R_2} f &= \int_{R_1} \left(\int_{R_2} f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_{R_2} \left(\int_{R_1} f(x, y) dx \right) dy \end{aligned}$$

- **[Extensión a múltiples variables]** Si $R := I_1 \times \cdots \times I_d$ es un rectángulo cerrado formado por intervalos I_j , y si f es continua en R , entonces:

$$\int_R f = \int_{I_1} \int_{I_2} \cdots \int_{I_d} f(x_1, x_2, \dots, x_d) dx_1 dx_2 \cdots dx_d$$

- **[Teorema de cambio de variables]** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto y acotado, $g : A \rightarrow \mathbb{R}^d$ una función inyectiva de clase C^1 , y $f : g(A) \rightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre $g(A)$. Entonces:

$$\int_{g(A)} f(y) dy = \int_A (f \circ g)(x) |\det g'(x)| dx.$$

- **[Coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$]** La parametrización en coordenadas polares se define como:

$$(x, y) = g(r, \theta), \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

donde:

$$\begin{aligned} x &= g_1(r, \theta) = r \cos \theta, \\ y &= g_2(r, \theta) = r \sin \theta. \end{aligned}$$

El Jacobiano está dado por:

$$J(r, \theta) := \det g'(r, \theta) = r.$$

- **[Coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$]** La parametrización en coordenadas cilíndricas se define como:

$$(x, y, z) = g(r, \theta, z),$$

donde:

$$r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}.$$

Las componentes están definidas por:

$$\begin{aligned} x &= g_1(r, \theta, z) = r \cos \theta, \\ y &= g_2(r, \theta, z) = r \sin \theta, \\ z &= g_3(r, \theta, z) = z. \end{aligned}$$

El Jacobiano está dado por:

$$J(r, \theta, z) := \det g'(r, \theta, z) = r.$$

- **[Coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$]** La parametrización en coordenadas esféricas se define como:

$$(x, y, z) = g(r, \theta, \varphi),$$

donde:

$$r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Las componentes están definidas por:

$$\begin{aligned} x &= g_1(r, \theta, \varphi) = r \cos \theta \sin \varphi, \\ y &= g_2(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= g_3(r, \theta, \varphi) = r \cos \varphi. \end{aligned}$$

El Jacobiano está dado por:

$$J(r, \theta, \varphi) := \det g'(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \varphi.$$