MA2001-1 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Javier Ramírez Ganga.
Auxiliar: Anaís Muñoz P.

Resumen 6:Optimizacion teoria

5 de enero 2025

Resumen

- **[Gradiente]** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Definimos su gradiente en x_0 como:

$$\nabla f(x_0) := f'(x_0)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_d}(x_0) \end{pmatrix}.$$

- **[Matriz Hessiana]** Si f es escalar y dos veces diferenciable en x_0 , su matriz Hessiana $f''(x_0)$ se define como

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_d}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_d}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

- **[Punto critico]** Un punto $x_0 \in A$ para el cual f es diferenciable y además

$$\nabla f(x_0) = 0 \tag{1}$$

se denomina *punto crítico* de f.

- **[Test de la segunda derivada]** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de clase C^2 en A abierto, y $x_0 \in A$ un punto crítico de f. Si $f''(x_0)$ es definida positiva (negativa), entonces x_0 es un mínimo local (máximo local) de f.

- **[Clasificación por valores propios]** Sea f de clase C^2 en un abierto A, y sea $x_0 \in A$ un punto crítico de f. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ los valores propios de $f''(x_0)$:

  1. Si todos son positivos (negativos), entonces x_0 es un mínimo local (máximo local).
  2. Si existen valores propios de distinto signo, entonces x_0 es un *punto silla*, es decir, existen direcciones $v_1, v_2 \in S(0,1)$ tales que:

$$f(x_0 + tv_1) \geq f(x_0), \quad f(x_0 + tv_2) \leq f(x_0),$$

  para $t \geq 0$ suficientemente pequeño. Además, v_1 y v_2 son vectores propios asociados a λ_1 y λ_2, respectivamente.

- **[Teorema de Lagrange]** Sean $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^1. Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) = 0\}$ el conjunto de restricciones.

  Si $x_0 \in S$ es un mínimo (máximo) local de f en S, y $\nabla g(x_0) \neq 0$, entonces existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\nabla f(x_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0).$$

  El escalar λ_0 se llama *multiplicador de Lagrange*.