MA2001-1 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Javier Ramírez Ganga.
Auxiliar: Anaís Muñoz P.

Resumen 5:Diferenciabilidad Parte 2

5 de enero 2025

Resumen

- **[Regla de la cadena]** Sean $f : A \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ y $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Si f es diferenciable en x_0 y g en $f(x_0)$, entonces $g \circ f : A \to \mathbb{R}^q$ es diferenciable en x_0, y se cumple:
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$
- **[Regla de la cadena, segunda versión]** Sean $f : A \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ y $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, con f diferenciable en x_0 y g en $f(x_0)$. Para $F = g \circ f$, diferenciable en x_0, se cumple:
$$\frac{\partial F_\ell}{\partial x_m}(x_0) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_\ell}{\partial y_k}(f(x_0))\frac{\partial f_k}{\partial x_m}(x_0),$$
donde $g = g(y_1, \ldots, y_p)$.
- **[Gradiente]** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Definimos su gradiente en x_0 como:
$$\nabla f(x_0) := f'(x_0)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_d}(x_0) \end{pmatrix}.$$
- **[Hipersuperficie]** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Una hipersuperficie suave en $\mathbb{R}^d$, (denotada $S(f)$), es el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^d$, soluciones de la ecuación
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_d) = 0, \quad x = (x_1, \ldots, x_d),$$
y donde además se satisface $\nabla f(x) \neq 0$.
- **[Hiperplano tangente]** Sea $S = S(f)$ una hipersuperficie suave. Definimos el hiperplano tangente a S en x_0 como:
$$\nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) = 0.$$
- **[dirección de máximo crecimiento]** El vector unitario $v_0 = \dfrac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$ representa la dirección de máximo crecimiento de f en el punto x_0.
- **[Conjunto convexo]** Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^d$ es convexo si para cualquier $x, y \in A$ $[x, y] := \{z \in \mathbb{R}^d : z = tx + (1-t)y,\ t \in [0, 1]\}$. Esta contenido en A
- **[Teorema del Valor Medio]** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ diferenciable en A, con A abierto y convexo. Entonces, para cualquier par de puntos $x, y \in A$,
$$f(x) - f(y) = \nabla f(z) \cdot (x - y), \quad z := x + (1-t)y$$
para cierto $t \in (0, 1)$.
- **[Funciones de clase C^k]** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Decimos que f es de clase C^k en A si todas sus derivadas parciales de orden $k-1$ tienen derivadas parciales continuas en A.

  Además, f es de clase C^∞ si es de clase C^k para todo $k \geq 0$.
- **[Schwartz]** Si f es de clase C^2 , entonces
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$
- **[Matriz Hessiana]** Si f es escalar y dos veces diferenciable en x_0 , su matriz Hessiana $f''(x_0)$ se define como
$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_d}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_d}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}(x_0) \end{pmatrix}$$
- **[Teorema de Taylor]**
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2}h^T f''(x_0)h + o(\|h\|^2)$$
para $s \in (0, 1)$