MA2001-1 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Javier Ramírez Ganga.
Auxiliar: Anaís Muñoz P.

Resumen 4:Diferenciabilidad Parte 1

5 de enero 2025

Resumen

- **[Derivada en varias variables]**
  Decimos que f es **diferenciable** en x_0 si existe una matriz de p filas y d columnas tal que para todo h, se tiene la descomposición
  $$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+r(h),$$
  donde $r(h)\in\mathbb{R}^p$ satisface
  $$\lim_{h\to 0}\frac{\|r(h)\|}{\|h\|}=0.$$
  Por último, diremos que f es diferenciable en A si lo es en cada punto de A.

- **[Unicidad en f diferenciable]**
  Si f es diferenciable en x_0, entonces su derivada $f'(x_0)$ es única.

- **[Continuidad en f diferenciable]**
  Si f es diferenciable en x_0, entonces f es continua en x_0.

- **[Derivadas parciales]**
  Sea $f: A\subset\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^p$. Para $i\in\{1,\dots,p\}$ y $j\in\{1,\dots,d\}$, la **derivada parcial** de f_i en x_0, es el siguiente límite:
  $$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f_i(x_0+te_j)-f_i(x_0)}{t},$$
  siempre que exista.

- **[Jacobiano]** Si $f: A\subset\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^p$ es diferenciable en $x_0\in A$, entonces todas sus derivadas parciales están definidas en x_0. Mejor aún, necesariamente $f'(x_0)$ debe ser la matriz de derivadas parciales de f, esto es:
  $$f'(x_0)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_d}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_d}\end{bmatrix}.$$

- **[Derivada direccional]** Sea $f: A\subset\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^p$, $x_0\in A$ y $v\in S(0,1)$. La derivada direccional de f en x_0, en la dirección v, denotada por $D_vf(x_0)$, corresponde al siguiente límite en $\mathbb{R}^p$:
  $$D_vf(x_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t},$$
  siempre que exista.

- **[Corolario derivada direccional]** Si $f: A\subset\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^p$ es diferenciable en x_0, entonces para cualquier $v\in S(0,1)$ necesariamente:
  $$D_vf(x_0)=f'(x_0)v.$$

- **[Función de clase C^1]** Sea $f: A\subset\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^p$ diferenciable en cada punto de A. Diremos que f es de clase C^1 en A si la función f' es continua en A. En otras palabras, si $x_n\to x\in A$, entonces
  $$\|f'(x_n)-f'(x)\|\to 0,$$

- **[Diferenciabilidad a partir de parciales]** Si todas las derivadas parciales de f existen en un abierto que contiene a x_0, y son continuas en x_0, entonces f es diferenciable en x_0.

- **[Funciones diferenciables]** Todas las funciones definidas como suma, resta, multiplicación escalar, división escalar (denominador no nulo) o composición de funciones cuyas derivadas parciales son continuas en sus respectivos dominios, son diferenciables.