MA2001-1 Cálculo en Varias Variables

Profesor: Javier Ramírez Ganga.
Auxiliar: Anaís Muñoz P.

Resumen 3:Limites y continuidad

5 de enero 2025

Resumen

- **[Función en varias variables]:** Dado un conjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{R}^d$, una función $f : A \to \mathbb{R}^p$ es una aplicación que a cada $x \in A$ le asocia un único vector $f(x) \in \mathbb{R}^p$. En notación simplificada,
$$f : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$$
$$x \mapsto f(x).$$

- **[Conjunto de nivel]:** Sea f una función escalar definida sobre un conjunto A de $\mathbb{R}^d$. Dado un número real c, el *conjunto de nivel* c de f (denotado $N_c(f)$) corresponde a la colección de puntos en A para los cuales el valor de f es precisamente c:
$$N_c(f) := \{x \in A : f(x) = c\}.$$

- **[Límites]:** El límite de una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ en el punto $x_0 \in \mathbb{R}^d$ es el vector $L \in \mathbb{R}^p$ si para cualquier sucesión (x_n) definida en A y convergente a x_0 (con $x_n \neq x_0$ siempre), la sucesión $(f(x_n))$ converge a $L \in \mathbb{R}^p$.

- **[Corolario Límites]:** Si existe una sucesión (x_n) definida en A y convergente a x_0, para la cual $(f(x_n))$ diverge, entonces f no tiene límite en x_0. Por otro lado, si dos sucesiones (x_n) e (y_n), definidas en A y convergentes a x_0, satisfacen $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$, entonces f tampoco tiene límite en x_0.

- **[Función continua]:** Una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ es continua en $x_0 \in A$ si para toda sucesión (x_n) definida en A y convergente a x_0, se tiene que la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(x_0)$.
Por otro lado, f es continua en A si es continua en cada punto de A.

- **[Continuidad en normas]:** Vista como una función de $\mathbb{R}^d$ hacia los reales no-negativos, toda norma $\|\cdot\|$ es continua.

- **[Continuidad y cerrados]:** Si una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ es continua en A, entonces la preimagen de todo conjunto cerrado en $\mathbb{R}^p$ es un conjunto cerrado incluido en A.