

MA2001-1 Cálculo en Varias Variables

Profesor: Javier Ramírez Ganga.

Auxiliar: Anaís Muñoz P.



Resumen 2: Topología

5 de enero 2025

Resumen

- **[Conjunto abierto]:** Un conjunto C es abierto si y solo si se cumple:

$$\forall x \in C, \exists r > 0 \rightarrow B(x_0, r) \subset C$$

- **[Conjunto cerrado]:** C es cerrado si es el complemento de un conjunto abierto
ie: C cerrado $\iff C^c$ abierto

- **[Conceptos de conjuntos]**

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto, se tendrá:

- **[Frontera]:** Se define como frontera de A al conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ que cumplen lo siguiente para todo $r > 0$.

$$B(x; r) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x; r) \cap A^c \neq \emptyset$$

Se puede denominar como $\text{Fr}(A)$.

- **[Adherencia]:** Se define como Adherencia de A al conjunto de puntos que cumplen la siguiente condición para todo $r > 0$:

$$B(x; r) \cap A \neq \emptyset$$

Se denominará así, $\text{Adh}(A)$.**Notar que:** Todo punto frontera cumple esta condición.

- **[Interior]:** Se define como interior de A a los puntos que cumplen la siguiente proposición:

$$\exists r > 0, B(x; r) \subseteq A$$

- **[Sucesiones]** Se define como sucesión en $\mathbb{R}^n$ a una función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ denotada por $f(n) = X_n$ o bien (X_n) .
Una sucesión será **acotada** si existe $M > 0$ tal que:

$$\|X_n\| \leq M; \forall n \in \mathbb{N}$$

- **[Convergencia de Sucesiones]** Se dirá que una sucesión X_n converge a X_0 si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_0$$

Por linealidad se tendrá que sea $X_n \rightarrow X_0$ e $Y_n \rightarrow Y_0$ con $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$

$$\lambda X_n + \beta Y_n \rightarrow \lambda X_0 + \beta Y_0$$

Notar que: Toda sucesión convergente es acotada.

- **[Subsucesión]:** dado X_n una subsucesión en $\mathbb{R}^n$ y $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función creciente, se tendrá que $(X_{\alpha(n)})$ será una subsucesión de X_n

- **[Sucesiones de Cauchy]** Se define como sucesión de Cauchy si para cualquier $\varepsilon > 0$:

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}; N, M \geq N_0; \|X_n - X_m\| < \varepsilon$$

- **[Espacio de Banach]**

Espacio vectorial normado cuyas sucesiones son de Cauchy en su totalidad.

- **[Caracterización de conjuntos cerrados]** C es cerrado si cumple:

- $C = \text{Adh}(C)$
- $\text{Fr}(C) \subseteq C$
- Si $x_n \subseteq C$, entonces si $x_n \rightarrow x_0$, se tendrá que $x_0 \in C$

- **[Teorema de Bolzano-Weierstrass]**
Toda sucesión $x_n \in \mathbb{R}^n$ acotada posee al menos una subsucesión convergente.

- **[Conjuntos compactos]:** Se dirá que C es compacto si toda sucesión en el conjunto posee una subsucesión que converge a un punto en C , por lo cual es cerrado y acotado.