MA2001-1 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Javier Ramírez Ganga.
Auxiliar: Anaís Muñoz P.

Resumen 1:Normas

5 de enero 2025

Resumen

- **[Norma]:** Tomando un espacio vectorial A sobre un cuerpo K, diremos que la función $\|\cdot\| : A \to [0, +\infty[$ si cumple las siguientes proposiciones.
  - *Positividad:* $\|x\| \geq 0, \forall x \in A$
  - *Cero si y solo si cero del espacio:* $\|x\| = 0 \iff x = 0_A$
  - *Desigualdad triangular:* $\forall x, y \in A, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
  - *"Los escalares salen del chat":* $\forall \lambda \in K, x \in A, \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
- **[Norma P]:** Sea p $\geq$ 1, donde x_i es la coordenada i-esima del vector x $\in \mathbb{R}^n$, la norma P es definida como:
  $\|x\|_p = \sum_{i=1}^{n} (|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$
  Datazo: Si p=2, se define la Norma Euclideana
- **[Producto interno]:** Una aplicación (función) define un producto interno en $\mathbb{R}^n$ si cumple lo siguiente:
  - **Positividad:**
    $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle \geq 0$
    $\langle x, y \rangle = 0 \iff x = 0 \vee y = 0$
  - **Linealidad:**
    $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$,
    $\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$
  - **Simetría:**
    $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- **[Desigualdad de Cauchy-Schwartz]:** Tomando norma euclideana, se tiene que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$

  $$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

  Notar que para este caso, el producto interno se definirá como:

  $$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

- **[Equivalencia de Normas]:** Sean dos normas denotadas como $\|x\|_\alpha, \|x\|_\beta$,serán equivalentes si existen $A_1, A_2 > 0$ que cumplen:

  $$A_1 \|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq A_2 \|x\|_\alpha$$