

MA2001-1 Cálculo en Varias Variables**Profesor:** Javier Ramírez Ganga.**Auxiliar:** Anaís Muñoz P.**Auxiliar 6: Diferenciabilidad.**

3 de enero 2025

P1. Sea $\alpha > 0$ y sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} (xy)^\alpha \cos\left(\frac{2\pi x}{x^2 + y}\right), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Demuestre que f es derivable parcialmente en $(0, 0)$ para todo $\alpha > 0$.
 b) Demuestre que f es diferenciable en $(0, 0)$ para todo $\alpha > \frac{1}{2}$.

Hint: En (c) puede usar sin demostrar que, para $\alpha, \beta > 0$, la función $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{(xy)^\alpha}{(x^2 + y^2)^\beta}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

es continua en $(0, 0)$ si y solo si $\alpha > \beta$.**P2.** Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} (3x^2 - 2y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}\right), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Estudie la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.
 (b) Calcule las derivadas parciales de f en cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
 (c) Calcule las derivadas parciales de f en $(0, 0)$.
 (d) Muestre que la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0, 0)$.

Hint: Podría ser útil considerar la sucesión (x_n, y_n) dada por $x_n = y_n = \frac{1}{5\sqrt{n\pi}}$.

- (e) Estudie la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$.

P3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + \frac{y \sin(x)}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Para $(x, y) \neq (0, 0)$, calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
 (b) Muestre que para $\mathbf{d} = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$ la derivada direccional $D_{\mathbf{d}}f((0, 0))$ sólo está bien definida para los vectores canónicos de $\mathbb{R}^2$ salvo ponderaciones. Obtenga en forma explícita el valor de:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

- (c) Estudie la diferenciabilidad de f , analizando por separado los casos $(x, y) \neq (0, 0)$ y $(x, y) = (0, 0)$.

Resumen

■ [Derivada en varias variables]

Decimos que f es **diferenciable** en x_0 si existe una matriz de p filas y d columnas tal que para todo h , se tiene la descomposición

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + r(h),$$

donde $r(h) \in \mathbb{R}^p$ satisface

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Por último, diremos que f es diferenciable en A si lo es en cada punto de A .

■ [Continuidad en f diferenciable]

Si f es diferenciable en x_0 , entonces f es continua en x_0 .

■ [Derivadas parciales]

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$. Para $i \in \{1, \dots, p\}$ y $j \in \{1, \dots, d\}$, la **derivada parcial** de f_i en x_0 , es el siguiente límite:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(x_0 + te_j) - f_i(x_0)}{t},$$

siempre que exista.

- [Jacobiano] Si $f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ es diferenciable en $x_0 \in A$, entonces todas sus derivadas parciales están definidas en x_0 . Mejor aún, necesariamente $f'(x_0)$ debe ser la matriz de derivadas parciales de f , esto es:

$$f'(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_d} \end{bmatrix}.$$

- [Derivada direccional] Sea $f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$, $x_0 \in A$ y $v \in S(0, 1)$. La derivada direccional de f en x_0 , en la dirección v , denotada por $D_v f(x_0)$, corresponde al siguiente límite en $\mathbb{R}^p$:

$$D_v f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t},$$

siempre que exista.

- [Corolario derivada direccional] Si $f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ es diferenciable en x_0 , entonces para cualquier $v \in S(0, 1)$ necesariamente:

$$D_v f(x_0) = f'(x_0)v.$$

- [Función de clase C^1] Sea $f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ diferenciable en cada punto de A . Diremos que f es de clase C^1 en A si la función f' es continua en A . En otras palabras, si $x_n \rightarrow x \in A$, entonces

$$\|f'(x_n) - f'(x)\| \rightarrow 0,$$

- [Diferenciabilidad a partir de parciales] Si todas las derivadas parciales de f existen en un abierto que contiene a x_0 , y son continuas en x_0 , entonces f es diferenciable en x_0 .

- [Funciones diferenciables] Todas las funciones definidas como suma, resta, multiplicación escalar, división escalar (denominador no nulo) o composición de funciones cuyas derivadas parciales son continuas en sus respectivos dominios, son diferenciables.