

MA2001-1 Cálculo en Varias Variables

Profesor: Javier Ramírez Ganga.

Auxiliar: Anaís Muñoz P.



Auxiliar 5: Pre Control 1 (Feliz año nuevo uwu).

30 de diciembre 2024

P1. Pruebe que el siguiente conjunto, es abierto.

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \cos(\sqrt{x^2 + y^2}) > \frac{1}{2} \right\}$$

P2. Sean A y B subconjuntos de \mathbb{R}^n . Considere las siguientes preguntas:

(a) Demuestre que:

$$\text{Adh}(A \cup B) = \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B).$$

(b) Deduzca, a partir del resultado de (a), que la unión de dos conjuntos cerrados es un conjunto cerrado y que la intersección de dos conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

(c) Demuestre que el conjunto:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \sin(y) < \log(1 + |x| + |y|)\}$$

es un conjunto abierto en \mathbb{R}^2 .

P3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x+1)^3 - x(y+1)^3 + x - y}{x^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 1) \\ K & \text{si } (x, y) = (0, 1) \end{cases}$$

(i) Definir el conjunto E en el que f no está definida.

(ii) Determinar el valor de K para que la función sea continua en el punto $P(0, 1)$.

(iii) Examinar si es continua o no en los puntos $Q(1, 1)$ y $R(-1, 1)$.

P4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{50x^2y^2}{x^2 + y^2} \cdot \ln\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - 1, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ -1, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Demuestre que f es continua en todo \mathbb{R}^2 .

Hint: Puede ser útil la siguiente desigualdad:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : 2|ab| \leq a^2 + b^2.$$

(b) Se define el conjunto

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 50x^2y^2 \cdot \ln(x^2 + y^2) > x^2 + y^2\}.$$

Demuestre que A es abierto.

(c) Se define el conjunto

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \geq 0\}.$$

Pruebe que K es no vacío, cerrado y contenido en la bola unitaria $B(0; 1)$.