MA2001-1 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Javier Ramírez Ganga.
Auxiliar: Anaís Muñoz P.

Capsula 5: Punto fijo.

28 de diciembre 2024

P1. Sea $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ y el sistema de ecuaciones

$$(E) \begin{cases} -2x + \sin(y) = 0, \\ 3 + e^{-x^2} - 6y = 0. \end{cases}$$

Demuestre que (E) tiene solución única en R. **Indicación:** Utilice el Teorema del Punto Fijo de Banach.

Resumen

- **[Función Lipschitz]:**
  Sea f una función definida en un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^d$, con valores en $\mathbb{R}^p$. Diremos que f es una función Lipschitz de constante $L > 0$ si

  $$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \qquad (2.28)$$

  para todo $x, y \in A$. Si además se puede escoger $L < 1$, diremos que f es una contracción.

- **[Punto fijo]:**
  Dada $f : A \subseteq \mathbb{R}^d \to A$, un punto fijo para f en A es cualquier punto $x \in A$ que satisface

  $$x = f(x).$$

- **[Teorema de punto fijo]:**
  Sea $B(0, R)$ la bola cerrada con centro en el origen y radio $R > 0$ en $\mathbb{R}^d$. Sea $f : B(0, R) \to B(0, R)$ una contracción. Entonces, f posee un único punto fijo en $B(0, R)$.