MA2001-1 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Javier Ramírez Ganga.
Auxiliar: Anaís Muñoz P.

Capsula 4: Conjunto de nivel.

28 de diciembre 2024

P1. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

(a) Calcule y dibuje las curvas de nivel de f.

(b) Utilizando las curvas de nivel calculadas en el punto anterior, argumente que no existe el límite.

P2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y}}$$

(a) Encuentre el conjunto donde f está bien definida, es decir, encuentre $\mathrm{Dom}(f)$ y además $\mathrm{Adh}(\mathrm{Dom}(f))$.

(b) Encuentre las curvas de nivel de f.

(c) Refiérase a la continuidad de f en $\mathrm{Dom}(f)$. Extienda f donde sea posible.

P3. Relacione las siguientes funciones con su correspondiente curva de nivel justificando con lo aprendido en clases. El descarte no vale como justificación.

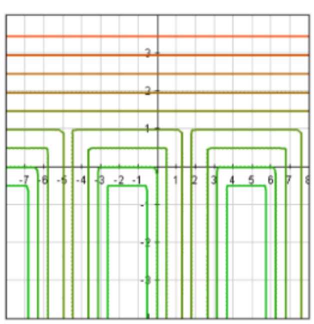
i) $f_1(x, y) = \cos(\sin((x-1)^2 + y^2))$

ii) $f_2(x, y) = \text{máx}\{\sin(x), y\}$

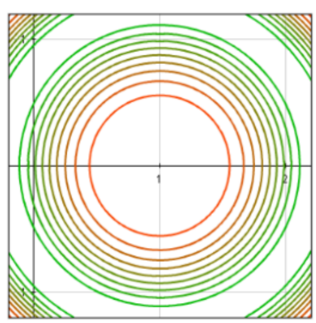
iii) $f_3(x, y) = y + 2x^2$

iv) $f_4(x, y) = \ln(2x + y)$

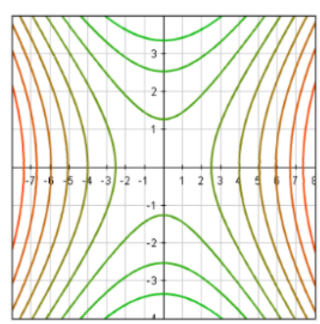
v) $f_5(x, y) = x^2 - 2y^2$



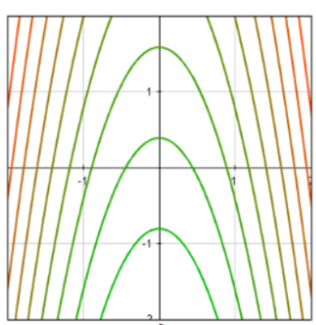
A

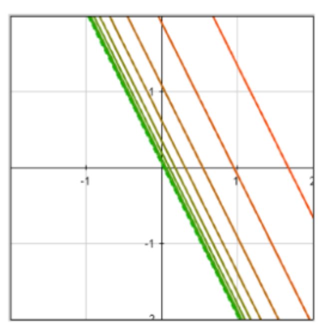


B



C





Resumen

- **[Función en varias variables]:** Dado un conjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{R}^d$, una función $f : A \to \mathbb{R}^p$ es una aplicación que a cada $x \in A$ le asocia un único vector $f(x) \in \mathbb{R}^p$. En notación simplificada,

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$$
$$x \mapsto f(x).$$

- **[Conjunto de nivel]:** Sea f una función escalar definida sobre un conjunto A de $\mathbb{R}^d$. Dado un número real c, el *conjunto de nivel* c de f (denotado $N_c(f)$) corresponde a la colección de puntos en A para los cuales el valor de f es precisamente c:

$$N_c(f) := \{x \in A : f(x) = c\}.$$