pauta guia control 1

Animo!

P1. Determine si las siguientes aplicaciones definen una norma en $\mathbb{R}^n$
Considere $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

(a) $N(x,y) = \sqrt{x^2 + 9y^2}$

(b) $M(x,y) = |x| + \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

(c) $O(x,y,z) = \sqrt{|x| + |y| + |z|}$

a. buscamos verificar las propiedades de norma!

1. positividad

$N(x,y) = \sqrt{x^2 + 9y^2}$

$\hookrightarrow$ Se tiene $\quad x^2 \geq 0$
$\quad 9 \geq 0$
$\quad y^2 \geq 0$

por lo que

$$x^2 + 9y^2 \geq 0$$

y la raiz de algo positivo, es positivo, por lo que

$$\sqrt{x^2 + 9y^2} \geq 0 \quad \checkmark$$

$\rightarrow$ tambien hay que probar que

$$\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = 0$$

probamos el implica hacia ambos lados:

$\Rightarrow)$

$$N(x,y) = 0$$

$$\sqrt{x^2+9y^2} = 0$$

$$x^2+9y^2=0$$

Suma de cosas positivas es 0 solo si ambas son 0, es decir:

$$x^2 = 0 \land 9y^2 = 0$$

$$x = 0 \land y = 0 \quad ✓$$

$\Leftarrow)$ es directo que

$$(x,y) = (0,0)$$

$$x = 0 \qquad y = 0$$

Remplazando:

$$\sqrt{0^2+3\cdot 0^2} = 0 \quad ✓$$

2. homogeneidad:

$$N(\lambda(x,y)) = N(\lambda x, \lambda y)$$
$$= \sqrt{(\lambda x)^2 + 9(\lambda y)^2}$$
$$= \sqrt{\lambda^2 x^2 + 9\lambda^2 y^2}$$
$$= \sqrt{\lambda^2 (x^2 + 9y^2)}$$
$$= |\lambda| \sqrt{x^2 + 9y^2}$$
$$= |\lambda| \, N(x,y) \quad \checkmark$$

3. desigualdad triangular:

queremos probar que

$$N(\vec{x} + \vec{y}) \leq N(\vec{x}) + N(\vec{y})$$

tomamos 2 vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$ arbitrarios

$$(n, m) = \vec{x} \qquad (z, w) = \vec{y}$$

y aqui, aremos algo para facilitar el calculo

[prop] hacer el desarrollo de forma extendida.

↳ notamos que

$$N(x,y) = \sqrt{x^2+9y^2} = \|(x,3y)\|_2$$

¿pudimos hacer esto desde el inicio?

Sip! pero quería mostrarles dos formas distintas!

Ahora si, estudiamos

$$\begin{aligned} N(\vec{x}+\vec{y}) &= N((n,m)+(z,w)) \\ &= N(n+z, m+w) \\ &= \|(n+z, 3(m+w))\|_2 \\ &= \|(n+z, 3m+3w)\|_2 \\ &= \|(n,3m)+(z,3w)\|_2 \\ &\leq \|(n,3m)\|_2 + \|(z,3w)\|_2 \\ &= N(n,m) + N(z,w) \end{aligned}$$

✓✓

∴ Como se cumplen las 3 propiedades $N(x,y)$ es norma!

b. $M(x,y) = |x| + \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

↳ notamos que, $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ es negativo para ciertos (x,y) por lo que sospechamos que la positividad puede fallar

tomamos (convenientemente)

$(x,y) = (0,-1)$

evaluamos

$$M(0,1) = |0| + \sqrt[3]{0^3 + (-1)^3}$$

$$= -1 \leq 0$$

$\therefore$ la positividad no se cumple

$M(x,y)$ no es norma!

c. $O(x,y,z) = \sqrt{|x|+|y|+|z|}$

Aqui nuevamente tomamos un (x,y) y un λ conveniente

↳ les dejo prop analizar porque esto conviene

→ Veremos que la homogeneidad falla!

tomamos $\lambda = 2 \wedge (x,y,z) = (1,0,0)$

estudiamos

$$\begin{aligned} O(\lambda(x,y,z)) &= O(2(1,0,0)) \\ &= O(2,0,0) \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Animo ♥

por otro lado

$$\begin{aligned} |\lambda| \cdot O(x,y,z) &= |2| \cdot O(1,0,0) \\ &= 2 \cdot 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

tenemos que

$$O(\lambda(x,y,z)) \neq |\lambda| \cdot O(x,y,z)$$

$\therefore$ $O(x,y,z)$ no cumple homogeneidad y no es norma!

P2. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, muestre que se cumple:

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$$

trabajaremos por parte!

Pdq :

$\forall \; x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ arbitrario

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

Dem) Como

$$\|x\|_2 = \|(x_1, \ldots, x_n)\|$$

$$= \|(x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, 0, x_n)\|$$

$$\leq \|(x_1, 0, \ldots, 0)\| + \|(0, x_2, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, 0, x_n)\|$$

Aplicamos desigualdad triangular n-1 veces

$$\|x\|_2 \leq \|(x_1, \ldots, 0)\|_2 + \|(0, x_2, \ldots, 0)\|_2 + \cdots + \|(0, \ldots, 0, x_n)\|$$

ademas se tiene que:

$$\|(0, \ldots, x_i, \ldots, 0)\| = \sqrt{0^2 + \cdots + x_i^2 + \cdots + 0^2}$$

$$= |x_i| \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

luego

$$\|X\|_2 \leq |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n|$$

$$\|X\|_2 \leq \|X\|_1$$

Que es lo pedido!

Ahora veremos la otra desigualdad.

pdq:

$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\|X\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|X\|_2$$

Dem) Sea $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$

trabajaremos con una funcion auxiliar

$$P(z) = \begin{cases} -1 & \text{si } z < 0 \\ 1 & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

notamos que

$$P(X_i)^2 = 1 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Consideramos

$$\vec{y} = (p(x_1), p(x_2), -, p(x_n))$$

luego

$$\|\vec{y}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p(x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1} = \sqrt{n}$$

Ademas, notamos que:

$$x_i \cdot p(x_i) = |x_i| \qquad \forall i \in \{1, -, n\}$$

↳ por como definimos $p(z)$

y entonces

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1$$

luego, de cauchy - schwarz

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$$

Remplazando

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_2 \qquad \blacksquare$$

P3. Para dos normas $\|x\|_\alpha, \|x\|_\beta$ en $\mathbb{R}^n$ se define la aplicación

$$N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to N(x) = \sqrt{\|x\|_\alpha^2 + \|y\|_\beta^2}$$

Demuestre que N es una norma en $\mathbb{R}^n$

Indicación: $\forall p, q, r, s \in \mathbb{R}$; $pr + qs \leq \sqrt{(p^2 + q^2)(r^2 + s^2)}$

nuevamente tenemos que analizar las condiciones 1, 2 y 3 (enunciadas en p1)

1. $N(X) = 0 \iff \sqrt{\|X\|_a^2 + \|X\|_b^2} = 0$

$$\underbrace{\|X\|_a^2 + \|X\|_b^2 = 0}$$

Suma de positivos $=0$

$$\|X\|_a^2 = \|X\|_b^2 = 0$$

$$\iff X = 0$$

y por def de $N(X)$, es directo que

$N(X) \geq 0 \quad \forall (X)$

$\therefore$ 1 se satisface

2. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in E$ arbitrarios, entonces:

$$N(\lambda x) = \sqrt{\|\lambda x\|_a^2 + \|\lambda x\|_b^2}$$

$$= \sqrt{|\lambda|^2 \|x\|_a^2 + |\lambda|^2 \|x\|_b^2}$$

$$= |\lambda| \sqrt{\|x\|_a^2 + \|x\|_b^2}$$

$$= |\lambda| \, N(x)$$

$\therefore$ 2 se satisface

3. Sean x e $y \in \mathbb{R}^2$ arbitrarios:
↪ analizaremos $N(x)^2$ para no trabajar arrastrando la raiz

$$(N(x+y))^2 = \|x+y\|_a^2 + \|x+y\|_b^2$$

$$\leq (\|x\|_a + \|y\|_a)^2 + (\|x\|_b + \|y\|_b)^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|_a \|y\|_a + \|y\|_a^2 + \|x\|_b^2 + 2\|x\|_b \|y\|_b + \|y\|_b^2$$

→ Reordenando terminos:

$$= N(x)^2 + N(y)^2 + 2\underbrace{(\|x\|_a \|y\|_a + \|x\|_b \|y\|_b)}_{*}$$

→ tenemos que el hint aplicado al parentesis es:

$$* = \left(\|x\|_a \|y\|_a + \|x\|_b \|y\|_b \right)$$

$$\leq \left(\|x\|_a^2 + \|x\|_b^2 \right)\left(\|y\|_a^2 + \|y\|_b^2 \right)$$

$$= N(x) \cdot N(y)$$

→ Juntando todo

$$(N(x+y))^2 \leq N(x)^2 + N(y)^2 + 2\, N(x) N(y)$$

$$= (N(x) + N(y))^2$$

Como N es definido positivo, podemos sacar raiz cuadrada a la desigualdad y se mantendra lo de adentro, asi:

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y)$$

∴ Se cumple la desigualdad triangular y $N(\cdot)$ es norma

∎

P4. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacios. Se define el conjunto suma, denotado $A + B$, como:

$$A + B = \{c \in \mathbb{R}^n \mid \exists a \in A, b \in B : c = a + b\}$$

(a) Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$.Pruebe que:

$$B(x, \varepsilon) = \{x\} + B(0, \varepsilon)$$

(b) Pruebe que si A es un conjunto abierto, entonces $A + B$ es un conjunto abierto.
Indicacion: Pruebe primero el resultado para $B = \{b\}$ con $b \in \mathbb{R}^n$

a. pdq. $\forall x \in B, \forall \varepsilon > 0$

$$B(x, \varepsilon) = \{x\} + B(0, \varepsilon)$$

· en efecto, Sean $x \in B$, $\varepsilon > 0$ arbitrarios

nota lo que haremos sera tomar un elemento en $B(x, \varepsilon)$ y demostrar que está tambien en $\{x\} + B(0, \varepsilon)$

pdq:

Sea $z \in B(x, \varepsilon) \Longleftrightarrow z \in \{x\} + B(0, \varepsilon)$

Dem| Sea $y \in B(x, \varepsilon)$

$$y \in B(x, \varepsilon) \leftrightarrow \|y - x\| \leq \varepsilon$$

$$\leftrightarrow \|(y - x) - 0\| \leq \varepsilon$$

$$\leftrightarrow y - x \in B(0, \varepsilon)$$

$$\leftrightarrow \exists z \in B(0, \varepsilon) : y - x = z$$

$$\rightarrow \exists z \in B(0,\varepsilon) : y = x + z$$

$$\leftrightarrow y \in \{x\} + B(0,\varepsilon)$$

Que es lo pedido.

$$\therefore\ B(x,\varepsilon) = \{x\} + B(0,\varepsilon)$$

$\blacksquare$

b. pdq

A es abierto $\longleftrightarrow$ A+B es abierto.

usamos el hint

caso 1 (demostrar el hint)

$B = \{b\}$, con $b \in \mathbb{R}^n$

pdq

$\forall x \in A+\{b\}, \exists \delta > 0$ tq

$$B(x,\delta) \in A + \{b\}$$

$\boxed{\text{Dem}}$

Sea $x \in A + \{b\}$, con A abierto.

$\longrightarrow \exists \bar{x} \in A \ : \ x = \bar{x} + b$

por otro lado, como A es abierto:

$\longrightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad B(\bar{x}, \varepsilon) \subseteq A \qquad (*)$

Sea entonces $y \in B(x, \delta)$ veamos que

$$\|y - x\| \leq \delta$$

$$\rightarrow \|y - (\bar{x} + b)\| \leq \delta$$

$$\|(y - b) - \bar{x}\| \leq \delta$$

$$y - b \in B(\bar{x}, \delta)$$

por lo cual, tomando $\delta \leq \varepsilon$, se tiene que:

$$\rightarrow y - b \in B(\bar{x}, \varepsilon)$$

$$y - b \in A \quad \text{(por (*))}$$

$$\exists \bar{y} \in A : y - b = \bar{y}$$

$$\exists \bar{y} \in A : y = \bar{y} + b$$

$$y \in A + \{b\}$$

$\therefore$ $A + \{b\}$ es abierto!

Caso 2. B arbitrario

Dem

Sea $x \in A + B$. debemos encontrar

$$\delta > 0 : B(x, \delta) \subseteq A + B$$

en efecto, notemos que, por definicion de $A+B$.

$$\exists q \in A, \exists p \in B : x = q + p$$

$$x \in A + \{p\}$$

por lo que:

$$\rightarrow \exists \delta > 0 : B(x, \delta) \subseteq A + \{p\}$$

(caso anterior)

$$\exists \delta > 0 \quad B(x, \delta) \subseteq A + B$$

$$A + \{p\} \subseteq A + B$$

$\therefore A + B$ es abierto!

P5. Considere el conjunto:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\right\}$$

Muestre que A es abierto.

utilizaremos que

A es abierto $\Leftrightarrow$ A^c es cerrado

y sabemos que

$A^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$

luego, basta demostrar A^c cerrado.

$\longrightarrow$ utilizamos sucesiones

Sea $U_n \longrightarrow U$ tal que $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A^c$

por convergencia coordenada a coordenada:

Si $U_n = (x_n, y_n) \wedge U = (U_x, U_y)$

Se tendra

$x_n \to U_x \quad \wedge \quad y_n \to U_y$

como $U_n \subseteq A^c$ se tenda que

$$x_n \geq y_n \qquad / \lim_{n\to\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$U_x \geq U_y$$

$\therefore (U_x, U_y) \in A^c$

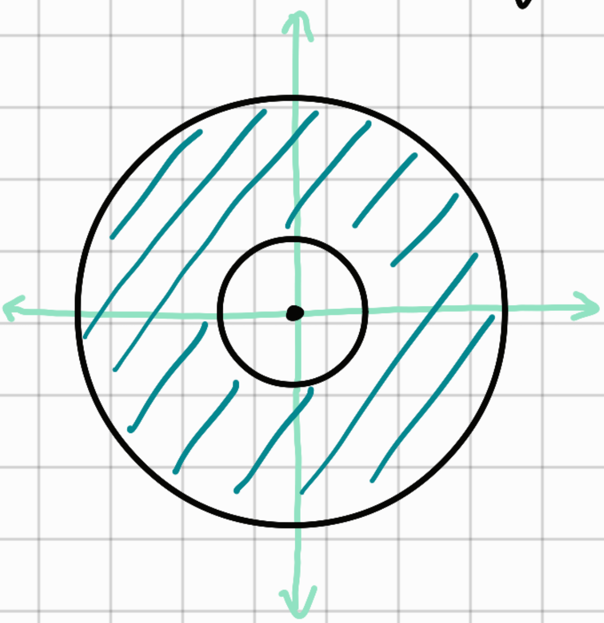
$\longrightarrow A^c$ es cerrado

$\therefore A$ es abierto!

P6. Encuentre explícitamente el interior, adherencia y frontera del siguiente conjunto y concluya si es cerrado o abierto:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 14\right\} \cup \{0, 0\}$$

Visualizando el conjunto:



$\longrightarrow$ Interior :

Se buscan los puntos (x,y) que satisfacen:

$\exists r>0 \quad ; \quad B((x,y),r) \subseteq A$

notamos que para los puntos

- $(0,0)$
- $(x,y) \mid x^2+y^2=2$
- $(x,y) \mid x^2+y^2=14$

la bola de $\varepsilon > 0$ $B(X,\varepsilon)$ no estara contenida

$$\therefore \ \text{int}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < x^2 + y^2 < 14\}$$

→ Adherencia:

Se buscan los puntos tal que: $\forall r > 0$

$$B(X, r) \cap A \neq \emptyset$$

↳ Alternativa: la adherencia son todos los x tal que para $X_n \in A$.

$$X_n \longrightarrow X$$

♥ nota ♥ no olvidar que se tiene siempre que:

$$A \subseteq \text{adh}(A)$$

entonces se tendra que:

$$\text{adh}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2 \leq x^2 + y^2 \leq 14\} \cup \{(0,0)\}$$

→ Frontera:

basta hacer

$$Fr(A) = adh(A) / int(A)$$

asi:

$$Fr(A) = \{(0,0)\} \cup \{x^2+y^2=2\} \cup \{x^2+y^2=14\}$$

P7. Demuestre que el conjunto A, definido como:

$$B = \{(x, e^x \mid x \in \mathbb{R})\}$$

es cerrado en $\mathbb{R}^2$.

Probaremos que:

$$\mathrm{Adh}(A) \subseteq A$$

↳ Si esto se cumple, tendremos que A es cerrado.

Dem | Sea $(x,y) \in \mathrm{adh}(A)$

entonces $\exists (x_n, y_n) \in A$ tal que:

$$(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$$

tenemos que

$$y_n = e^{x_n}$$

Por lo tanto $e^{x_n} \longrightarrow e^x$

y ademas como $y_n \longrightarrow y$, luego

$$(x, y) = (x, e^x)$$

Por ende $(x, y) \in A$

Concluimos $Adh(A) \subseteq A$.

$\therefore$ A es cerrado.

P8. Consideremos $A \subseteq \mathbb{R}^2$ como sigue:

$$A = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) : x > 0 \right\}$$

(a) Bosqueje la región.

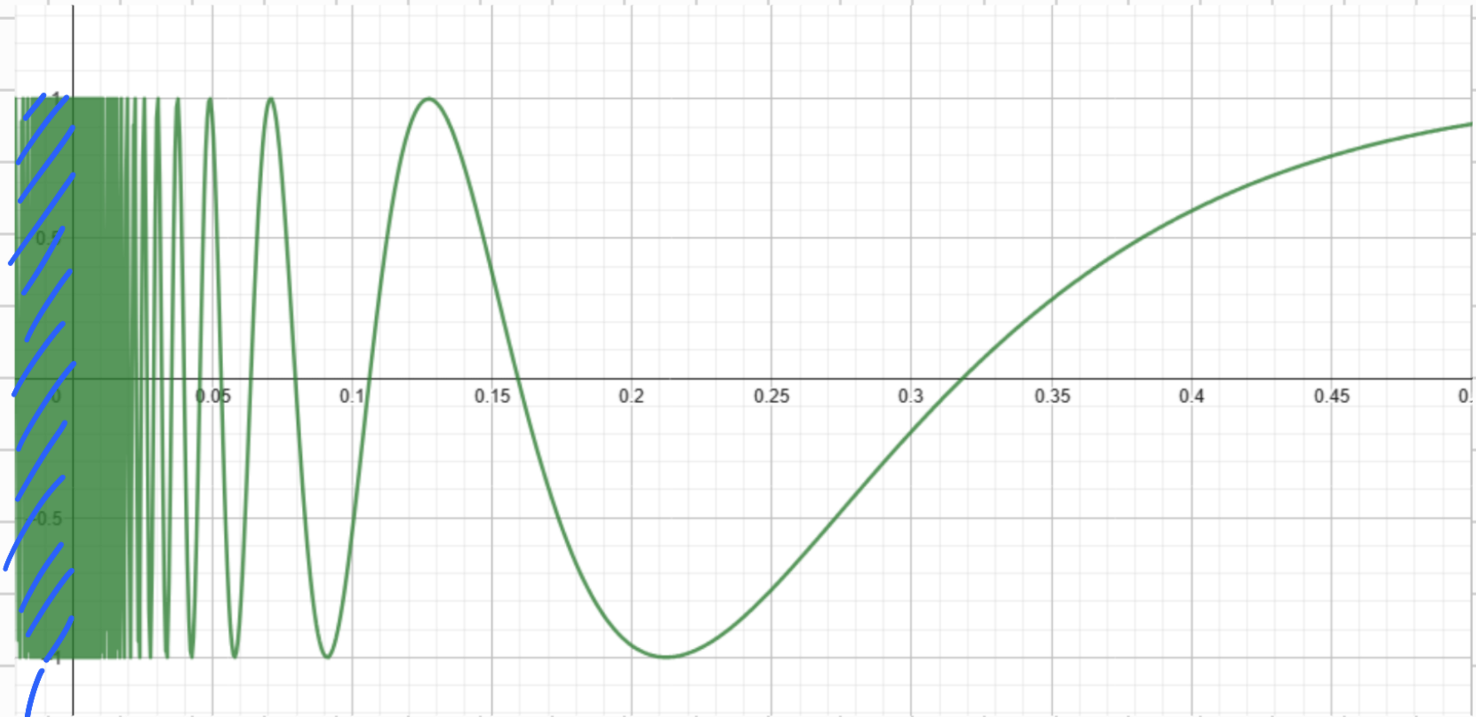
(b) Demuestre que $\operatorname{int}(A) = \emptyset$.

(c) Encuentre $\operatorname{Adh}(A)$.

a. basta notar que la region A es el grafo de la funcion

$$f(X) = \operatorname{Sen}(1/x)$$

la cual es:



la parte azul no pertenece!

b. pdq $\text{int}(A) = \emptyset$

↳ Como nos piden demostrar, hay que "hacerlo bien"

procedemos por contradiccion.

Sea $(x,y) \in \text{int}(A)$

$\longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : \; B((x,y),\varepsilon) \subseteq A.$

como $(x,y) \in \text{int}(A)$, en particular $(x,y) \in A$. luego, cumplen

$x > 0$ (i) $\wedge$ $y = \text{Sen}(1/x)$ (ii)

Consideramos el elemento

$(x, y + \varepsilon/2) \in \mathbb{R}^2$

↳ es claro que $(x, y+\varepsilon/2) \in B((x,y),\varepsilon)$

$\longrightarrow (x, y+\varepsilon/2) \in A.$

(ya que $B((x,y),\varepsilon)$ esta totalmente contenido en A)

luego, como $(x, y+\varepsilon/2) \in A$, se cumple que:

$$x > 0 \ (iii) \quad \wedge \quad y + \varepsilon/2 = \operatorname{sen}(1/x) \ (iv)$$

$\longrightarrow$ igualando (iii) con (iv)

$$y + \varepsilon/2 = y = \operatorname{sen}(1/x)$$

$$\cancel{y} + \varepsilon/2 = \cancel{y}$$

$$\varepsilon/2 = 0 \longrightarrow \Leftarrow$$

$$\therefore \ \operatorname{int}(A) = \emptyset$$

C. Se pide encontrar adh(A)

$\hookrightarrow$ haré la demostración "rigurosa" para que les sirva de guía.

Tomando

$$B = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$$

y proponemos

$$\operatorname{Adh}(A) = A \cup B$$

$\hookrightarrow$ esto es "al ojo"

pero hay que comprobarlo!

Se tendra que, si $A \cup B$ es el menor cerrado que contiene a A, entonces $A \cup B = Adh(A)$, probaremos eso!

pdq:

$A \cup B$ es el menor cerrado que contiene a A.

primero veamos que

pdq: $A \cup B$ es cerrado.

Sea $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \cup B$

Tal que $(x_n, y_n) \to (x, y)$

Sabemos que

$x_n \to x \quad \wedge \quad y_n \to y$

los cuales satisfacen

$x_n \geq 0 \quad \wedge \quad -1 \leq y_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

nos dividimos por casos.

- Caso 1: $x = 0$

  Tenemos que:

$\longrightarrow (x, y) \in B$ (por def de B)

$\longrightarrow (x, y) \in A \cup B$

- Caso 2: $x > 0$

Tenemos que:

$\longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, \ x_n > 0$

ya que $x_n \to x$

$\longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, \ (x_n, y_n) \in A$

ya que $((x_n, y_n)) \subseteq A \cup B$

$\longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ \ y_n = \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x_n}\right)$

esto es que:

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x_n}\right)$$

Como $\operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ es composicion de continuas y ademas $y_n \to y$, $x_n \to x$ Tendremos:

$$y = \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\longrightarrow (x, y) \in A$

$\longrightarrow (x, y) \in A \cup B.$

como lo probamos para $x = 0 \wedge x > 0$ se tiene para $x \geq 0$

$\therefore A \cup B$ es cerrado.

Ahora veamos que es el menor conjunto cerrado que contiene a A.

Pdq: $\forall C \subseteq \mathbb{R}^2$ cerrado : $A \subseteq C \to A \cup B \subseteq C$

Sea $C \subseteq \mathbb{R}^2$ cerrado con $A \subseteq C$

Sea $(x, y) \in B$

Consideremos la sucesion

$((x_n, y_n))_n \subseteq \mathbb{R}^2$ definida por:

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{2n\pi + \arcsin(c)}, c \right) \quad \forall n \geq 1$$

↳ se que parece random (y lo es) pero juro que tendra sentido

es claro que $x_n \to 0$ (ya que Arcsen es acotado pero $2n\pi \to \infty$ cuando $n \to \infty$)

además se tiene:

$$y_n = c$$

$$y_n = \operatorname{Sen}(\operatorname{Arcsen}(c))$$

$$y_n = \operatorname{Sen}(2n\pi + \operatorname{Arcsen}(c)) \quad \forall n \geq 1$$

↳ por sen periodico !

$$y_n = \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi + \operatorname{Arcsen}(c)}} \right) \quad \forall n \geq 1$$

↳ "niquita nipone" en división

$$y_n = \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x_n} \right) \quad \forall n \geq 1$$

$$\longrightarrow ((x_n, y_n))_n \subseteq A$$

Como ya teniamos, por hipotesis, $A \subseteq C$:

$\longrightarrow ((x_n, y_n))_n \subseteq C$

y ademas como C es cerrado y

$(x_n, y_n) \longrightarrow (0, c)$

entonces $(0, c) \in C$

$\longrightarrow B \subseteq C$

$\therefore A \cup B \subseteq C$

finalmente, como $A \cup B$ es el menor cerrado que contiene a A

$$Adh(A) = A \cup B.$$

P9. Determine la existencia de los siguientes límites:

(a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y^2-x)^2}{x^2+y^2}$$

(b) $$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy^2z}{x^2+y^2+z^2}$$

(c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+x^2-2y^3+y^2}{x^2+y^2}$$

a. estudiamos por medio de sucesiones

- Primero tomamos $y^2 = n \wedge x = n$ con $n \to 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y^2-x)^2}{x^2+y^2} = \lim_{n\to 0} \frac{(n-n)^2}{n^2+n} = 0$$

- Tomando luego $y = 0 \wedge x = n$ con $n \to 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y^2-x)^2}{x^2+y^2} = \lim_{n\to 0} \frac{(0^2-n)^2}{n^2+0^2}$$

$$= \lim_{n\to 0} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

$$\boxed{\therefore \text{ el limite noexiste}}$$

b. Trabajaremos acotando la expresion!

$$\left|\frac{x\,y^2 z}{x^2+y^2+z^2}\right|$$

$\longrightarrow$ Se tiene que

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{3}(a+b+c)$$

Tomando $a=x^2,\ b=y^2,\ c=z^2$

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leq \frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)$$

$$(xyz)^{\frac{2}{3}} \leq \frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)$$

$$xyz \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$$

$\longrightarrow$ remplazando

$$\left|\frac{x\,y^2 z}{x^2+y^2+z^2}\right| \leq \left|\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{y\cdot(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2+z^2}\right|$$

$$\leq \frac{1}{(3)^{3/2}}\left|y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right|$$

luego cuando $(x,y,z) \to (0,0,0)$

$$\frac{1}{(3)^{3/2}} \left| y \sqrt{x^2+y^2+z^2} \right| \to 0$$

por sandwich se concluye que

Cuando $(x,y,z) \to (0,0,0)$

$$\left| \frac{x\, y^2\, z}{x^2+y^2+z^2} \right| \to 0$$

$$\boxed{\therefore \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left| \frac{x\, y^2\, z}{x^2+y^2+z^2} \right| = 0}$$

$\to$ Alternativa mas izi

Se tiene que $x^2+y^2+z^2 \geq y^2$, luego

$$\left| \frac{x\, y^2\, z}{x^2+y^2+z^2} \right| \leq \left| \frac{x y^2 z}{y^2} \right| \leq |x z|$$

cuando $(x,y,z) \to (0,0,0)$; $|xz| \to 0$

por sandwich se tiene que :

$$\boxed{\therefore \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left| \frac{x\, y^2\, z}{x^2+y^2+z^2} \right| = 0}$$

C. Trabajaremos realizando un cambio de variables a polares.

Tomamos

$$x = \rho\cos(\theta) \quad ; \quad y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)$$

notar que $(x,y) \to (0,0)$ cuando $\rho \to 0$, asi, se tiene:

$$\frac{x^3 + x^2 - 2y^3 + y^2}{x^2 + y^2} = \frac{\rho^3\cos^3(\theta) - \rho^3\mathrm{sen}^3(\theta) + \rho^2}{\rho^2}$$

$$= \rho\left(\cos^3(\theta) - \mathrm{sen}^3(\theta)\right) + 1$$

luego

$$\lim_{\rho \to 0} \rho\left(\cos^3(\theta) - \mathrm{sen}^3(\theta)\right) + 1 = 1$$

$$\boxed{\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \rho\left(\cos^3(\theta) - \mathrm{sen}^3(\theta)\right) + 1 = 1}$$

P10. Encuentre para cuáles números naturales $n \geq 2$ el siguiente límite existe:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^n + y^n}{x^2 - y^2}$$

→ Analizamos primero el caso $n = 2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

notamos que. si hacemos primero $y \to 0$

$$\lim_{y \to 0} \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = 1.$$

pero luego, si hacemos primero $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = -1.$$

Sin importar que luego tomemos el otro limite faltante (segun el caso) el limite no existe

$\therefore$ para $n = 2$ el limite no existe!

→ para $n > 2$

hacemos cambio de variable a polares, tal que:

$$X = \rho \cos \vartheta \qquad y = \rho \operatorname{sen} \vartheta$$

$$\lim_{r \to 0} r^{(n-2)} \frac{(\cos^n(\vartheta) + \operatorname{sen}^n(\vartheta))}{\cos^2 \vartheta - \operatorname{sen}^2 \vartheta}$$

↳ es facil notar que ese limite tiende a 0, pero debemos tener cuidado con un caso

→ denominador 0.

Si

$$\cos^2 \vartheta = \operatorname{sen}^2 \vartheta$$

entonces el limite no existe!

↳ Como, el limite debe existir para todas las direcciones, incluyendo

$$x = \rho \cos(\pi/4) \qquad y = \rho \operatorname{sen}(\pi/4)$$

↳ Que seria uno de los casos problematicos

Esto nos indica que debemos probar que el limite no existe!

• primero, notamos que, para, por dar una opcion $\left(\frac{1}{k},0\right) \to (0,0)$ se tiene

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^n}{\left(\frac{1}{k}\right)^2} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{n-2} = 0$$

• pero por otro lado, tomando

$$\vartheta_k = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{k} \qquad k \geq 0$$

notamos que, definiendo

$$r_k = \left(\frac{\cos^2(\vartheta_k) - \operatorname{sen}^2(\vartheta_k)}{\cos^n(\vartheta_k) + \operatorname{sen}^n(\vartheta_k)}\right)^{\frac{1}{n-2}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

luego, se tiene que

$$(x,y) = r_k\left(\cos(\vartheta_k), \operatorname{sen}(\vartheta_k)\right) \to (0,0)$$
si $k \to 0$, luego

$$\lim_{k\to\infty} r_k^{(n-2)} \frac{\left(\cos^n(\vartheta_k) + \operatorname{sen}^n(\vartheta_k)\right)}{\cos^2(\vartheta_k) - \operatorname{sen}^2(\vartheta_k)} = 1.$$

luego, como para ambas sucesiones, el limite es distinto

$\therefore$ el limite no existe

P11. Estudie la convergencia del siguiente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5+2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

por intuicion, pareciera que el limite es 0, por lo tanto, acotaremos utilizando valor absoluto.

$$0 \leq \left|\frac{x^5+2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq |x| \underbrace{\left|\frac{x^4+2y^4}{(x^2+y^2)^2}\right|}_{\text{Acotaremos esto!}}$$

→ usando coordenadas polares

$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\,\text{sen}\,\theta$$

$$\left|\frac{x^4+2y^4}{(x^2+y^2)^2}\right| = \left|\frac{\cancel{\rho^4}(\cos^4\theta + 2\,\text{sen}^4\theta)}{\cancel{\rho^4}}\right|$$

luego, como

$$\cos^4\theta \leq 1 \quad \wedge \quad \text{sen}^4\theta \leq 1$$

Tendremos que

$$\left|\frac{x^4+2y^4}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq (1+2\cdot 1)=3$$

Remplazando en la desigualdad original:

$$0 \leq \left|\frac{x^5+2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq |x|\cdot 3$$

luego, cuando $(x,y)\to(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|\cdot 3 = 0$$

$\therefore$ por Sandwich se concluye que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5+2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

P12. Considere una sucesión $S_n = (x_n, y_n) \to (0,0)$.
Definimos la sucesión $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera:

$$Z_n = \left(\frac{x_n(\cos(y_n)-1)}{x_n^2+y_n^2}, \frac{2x_n^\alpha + y_n^2}{|x_n| + 3\,|y_n|}\right)$$

(a) Muestre que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge cuando $\alpha = 2$ e indique su límite.
Hint: Recuerde que $x^2+y^2 \geq 2xy$ y $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x} = 0$

(b) Estudie qué sucede con la convergencia si $\alpha = 1$

a. basta trabajar coordenada a coordenada

$$Z_n = \left(\underbrace{\frac{X_n(\cos(y_n)-1)}{X_n^2+y_n^2}}_{1}, \underbrace{\frac{2X_n^\alpha + y_n^2}{|X_n|+3|y_n|}}_{2}\right)$$

→ Trabajamos 1.

↳ nuevamente pareciera converger al 0 así que trabajamos con el modulo.

$$0 \leq \left|\frac{X_n(\cos(y_n)-1)}{X_n^2+y_n^2}\right| \overset{\text{hint}}{\leq} \left|\frac{\cancel{X_n}(\cos(y_n)-1)}{2|\cancel{X_n}\,y_n|}\right|$$

$$0 \leq \left|\frac{X_n(\cos(y_n)-1)}{X_n^2+y_n^2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{\cos(y_n)-1}{y_n}\right|$$

Como se tiene que

$$\lim_{X\to 0} \frac{1-\cos(X)}{X}$$

y se Sabe que $y_n \to 0$

entonces

$$\frac{\cos(y_n)-1}{y_n} \xrightarrow{y_n \to 0} 0$$

∴ por Sandwich se tendra

que cuando $(x_n, y_n) \to (0,0)$, entonces

$$\frac{x_n(\cos(y_n)-1)}{x_n^2+y_n^2} \longrightarrow 0$$

→ Trabajando 2.

↪ no olvidar que $\alpha = 2$ en esta parte, asi:

$$\underbrace{0 \leq \frac{2x_n^2+y_n^2}{|x_n|+3|y_n|}}$$

esta cota se tiene pues:

$x_n^2 \geq 0 \wedge y_n^2 \geq 0 \wedge |x_n| \geq 0 \wedge |y_n| \geq 0$

Ahora, acotamos superiormente:

$$0 \leq \frac{2x_n^2 + y_n^2}{|x_n| + 3|y_n|} = \frac{2x_n^2}{|x_n| + 3|y_n|} + \frac{y_n^2}{|x_n| + 3|y_n|}$$

$$0 \leq \frac{2x_n^2 + y_n^2}{|x_n| + 3|y_n|} \leq \frac{2x_n^2}{|x_n|} + \frac{y_n^2}{3|y_n|}$$

como $x_n^2 \geq 0$ $|x_n^2| = x_n^2$

y $|y_n^2| = y_n^2$, asi

$$0 \leq \frac{2x_n^2 + y_n^2}{|x_n| + 3|y_n|} \leq \left|\frac{2x_n^{\cancel{2}}}{\cancel{x_n}}\right| + \left|\frac{y_n^{\cancel{2}}}{3\cancel{y_n}}\right|$$

$$0 \leq \frac{2x_n^2 + y_n^2}{|x_n| + 3|y_n|} \leq 2|x_n| + \frac{|y_n|}{3}$$

como $|x_n| \to 0$ $\wedge$ $|y_n| \to 0$

$\therefore$ por sandwich

$$\frac{2x_n^2 + y_n^2}{|x_n| + 3|y_n|} \to 0$$

$\therefore$ $z_n \longrightarrow (0,0)$

b. con $\alpha = 1$ la sucesion queda:

$$z_n = \Bigg(\underbrace{\frac{x_n(\cos(y_n)-1)}{x_n^2+y_n^2}}_{1}, \underbrace{\frac{2x_n^1+y_n^2}{|x_n|+3|y_n|}}_{2} \Bigg)$$

↳ Como es una sucesion coordenada a coordenada, basta que una no converja para que z_n no lo haga.

⟶ Trabajamos con 2.

Tomamos 2 Sucesiones distintas

$$S_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$$

evaluando en 2.

$$\frac{2\cdot\frac{1}{n}+0}{\left|\frac{1}{n}\right|+3\cdot 0} \xrightarrow{n\to\infty} 2$$

luego, tomando

$$\bar{S}_n = \left(\frac{-1}{n}, 0\right) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$$

evaluando en 2.

$$\frac{2\cdot \frac{-1}{n} + 0}{\left|\frac{-1}{n}\right| + 3\cdot 0} \xrightarrow{n\to\infty} -2$$

$\therefore$ Como los limites son distintos el limite no existe!

P13. Para $\gamma \in \mathbb{R}$ considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x+2y}-1}{e^{x+y}-1} & \text{si } x+y \neq 0 \\ \gamma & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$$

(a) Encuentre γ tal que f sea continua en $\mathbb{R}^2$

→ primero, lo que nos sirve para rascar puntitos (NO OlViDAR) :^:

- notamos que, por algebra y composicion de funciones continuas $f(x,y)$ es continuo $\forall (x,y)$ tal que $x+y \neq 0$
- luego, para (x,y) talque $x+y=0$

↳ notar que esto corresponde a $(a,-a)$

→ Analizamos el limite

$$\lim_{(x,y)\to(a,-a)} \frac{e^{2x+2y}-1}{e^{x+y}-1}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(a,-a)} \frac{e^{2(x+y)}-1}{e^{x+y}-1}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(a,-a)} \frac{(e^{x+y}-1)(e^{x+y}+1)}{(e^{x+y}-1)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(a,-a)} \frac{\cancel{(e^{x+y}-1)}(e^{x+y}+1)}{\cancel{(e^{x+y}-1)}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(a,-a)} e^{x+y}+1 = 2$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(a,-a)} \frac{e^{2x+2y}-1}{e^{x+y}-1} = 2$$

↳ luego, para que la funcion sea continua $\forall (x,y)$, basta con que

$$\gamma = 2.$$

$\boxtimes$

P14. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\sin(x)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Determine si f es continua en el $(0,0)$

↳ Trabajaremos con una sucesion arbitraria y acotando la solucion

Sea $(x_n, y_n) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$. Entonces:

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2), \quad |\operatorname{Sen} x| \leq |x|$$

Se sigue que:

$$0 \leq |f(x_n, y_n)| = \left| \frac{x_n y_n \quad |x_n|}{2|x_n y_n|} \right|$$

$$0 \leq |f(x_n, y_n)| \leq \frac{|x_n|}{2} \to 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} |f(x_n, y_n)| = 0 = f(0,0)$$

↳ por lo que f es continua en $(0,0)$

$\blacksquare$

P15. Estudie la continuidad de las siguientes funciones en $\mathbb{R}^n$:

(a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2y)\operatorname{sen}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(b) $$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{50x^2+y^2}{x^2+y^2} \ln\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) - 1 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ -1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(c) $$h(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{\exp\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) - 1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 1 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

a)

$$f(x,y) \begin{cases} \dfrac{(xy)\operatorname{sen}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

• para $(x,y) \in \mathbb{R}^2/(0,0)$

por algebra y composicion de funciones continuas f es continua en $\mathbb{R}^2/(0,0)$

• para $(x,y) = (0,0)$

↳ es necesario estudiar el limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Trabajaremos acotando la funcion

Sea una sucesion arbitraria

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$$

Se tendra

$$0 \leq |f(x_n, y_n)| \leq \left| \frac{(x_n^2 y_n)}{x_n^2 + y_n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{x_n^2 y_n}{x_n^2 + y_n^2}\right) \right|$$

$$\leq \left| \frac{x_n (x_n y_n)}{x_n^2 + y_n^2} \right| \left| \operatorname{sen}\left(\frac{x_n^2 y_n}{x_n^2 + y_n^2}\right) \right|$$

Se sabe que el seno es acotado

$$|\operatorname{sen}(z)| \leq 1 \qquad \forall z$$

y ademas

$$0 \leq (x - y)^2 \leq x^2 + y^2 - 2xy$$

$$0 \leq x^2 + y^2 - 2xy$$

$$2xy \leq x^2 + y^2$$

$$xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

$\longrightarrow$ Ambas cosas las utilizamos para acotar

$$0 \leq |f(x_n, y_n)| \leq \left|\frac{x_n(x_n y_n)}{x_n^2+y_n^2}\right| \left|\operatorname{sen}\left(\frac{x_n^2 y_n}{x_n^2+y_n^2}\right)\right|$$

$$\leq \left|\frac{1}{2} \frac{x_n \cancel{(x_n^2+y_n^2)}}{\cancel{x_n^2+y_n^2}}\right| |1|$$

$$\leq \frac{1}{2}|x_n|$$

Se tiene por lo tanto:

$$0 \leq f(x_n, y_n) \leq \frac{1}{2}|x_n|$$

Cuando $(x_n, y_n) \to (0,0)$ $\quad \frac{1}{2}|x_n| \to 0$

por lo que se tendra

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

$\therefore$ $f(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$

b) $$g(x,y)\begin{cases} \dfrac{50\,x^2y^2}{x^2+y^2}\ln\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)-1 & (x,y)\neq(0,0) \\ -1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

• para $(x,y)\neq(0,0)$

Por algebra y composicion de funciones continuas $g(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2/(0,0)$

• para $(x,y)=(0,0)$

Queremos estudiar si se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = -1$$

lo que es equivalente a probar

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)+1 = 0$$

Se tendra:

$$\lim_{(x,y)} \frac{50\,x^2y^2}{x^2+y^2}\ln\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cancel{-1+1}^{\,0}$$

$\longrightarrow$ trabajamos acotando la expresion:

$$0 \leq \left| \frac{50\,(x^2 y^2)}{x^2+y^2} \ln\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \right| \leq \left| \frac{50\,(x^2+y^2)^{\cancel{2}}}{4\,\cancel{(x^2+y^2)}} \left(-\ln(x^2+y^2)\right) \right|$$

$$\leq \frac{25}{2} \left| (x^2+y^2) \ln(x^2+y^2) \right|$$

hacemos cambio de variable a polares

$$x = \rho \cos \theta \qquad\qquad y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

Con lo que tendremos

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

y ademas

$$(x,y) \to (0,0) \quad \Rightarrow \quad \rho \to 0$$

lo que nos queda el limite:

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^2 \ln(\rho^2)$$

esto es equivalente a estudiar:

$$\lim_{r \to 0^+} r \ln(r) \quad \Big\} \text{ ya que } \rho \geq 0$$

Desarrollamos :

$$\lim_{r \to 0^+} r\ln(r) = \lim_{r \to 0^+} \frac{\ln(r)}{1/r} \overset{LH}{=} \lim_{r \to 0^+} \frac{1/r}{-1/r^2} = \lim_{r \to 0^+} -r = 0$$

por lo tanto

$$\lim_{p \to 0} p^2 \ln(p^2) = 0$$

y luego se tendra

$$0 \leq g(x,y) \leq \frac{25}{2} |p^2 \ln(p^2)|$$

por lo tanto cuando $(x,y) \to (0,0)$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} g(x,y) = 0 = g(0,0)$$

$\therefore$ $g(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$

c)

$$h(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{\exp\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{si } (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$$

$\longrightarrow$ tenemos que ver si se tiene

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} h(x,y,z) = 1$$

notamos que tomando

$$t = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$(x,y,z)\to(0,0,0) \Longrightarrow t\to 0$$

Se tendra:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} h(x,y,z) = \lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t}$$

$$= 1 \quad \text{(limite conocido)}$$

$\therefore$ $h(x,y,z)$ es continua en $(0,0)$ y como por algebra y comp es continua en $\mathbb{R}^3/(0,0,0)$

$\longrightarrow$ es continua en todo $\mathbb{R}^3$

P16. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{(x^2+y^2)} - 1}{\ln(x^2+y^2+1)} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Pruebe que f es continua.

(b) Muestre que $\lim\limits_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = +\infty$.

(c) **[Propuesto]**Qué se puede decir sobre el máximo y el mínimo de la función?Se alcanza alguno de ellos?

a) · Caso 1 $(x,y) \neq (0,0)$

$f(x,y)$ es continua por algebra y composicion de funciones continuas.

· Caso 2 $(x,y) = (0,0)$

Vemos el limite

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{\ln(x^2+y^2+1)}$$

$$= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{e^{\|(x,y)\|_2^2} - 1}{\ln(\|(x,y)\|_2^2 + 1)}$$

tomamos $t = \|(x,y)\|_2^2$

y se tendrá

$(x,y) \to (0,0) \Longrightarrow t \to 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{\ln(t+1)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} \frac{t}{\ln(t+1)}$$

$$= 1 \cdot 1 = 1$$

$\therefore f$ es continua en $(0,0)$

$\therefore f$ es continua en $\mathbb{R}^2$

b) Analogo a lo anterior:

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = \lim_{\|(x,y)\|} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{\ln(x^2+y^2-1)}$$

$$= \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{e^{\|(x,y)\|_2^2} - 1}{\ln(\|(x,y)\|_2^2 + 1)}$$

$\longrightarrow$ tomando $t = \|(x,y)\|^2$

$\|(x,y)\| \to \infty \implies t \to \infty$

Se tendra:

$$\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = \lim_{t \to \infty} \frac{e^t - 1}{\ln(t+1)}$$

L'Hoppital

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{e^t}{\frac{1}{(t+1)}}$$

$$= \lim_{t \to \infty} e^t (t+1)$$

$$= +\infty$$

$\hookrightarrow$ Que es el resultado pedido!