MA2001-1 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Javier Ramírez Ganga.
Auxiliar: Anaís Muñoz P.

Auxiliar 4: Limites y Continuidad.

27 de diciembre 2024

P1. Muestre que los siguientes límites no existen:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3-y^3}{2x^3+4y^3}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x)-\sin(y)}{x+y}$

P2. Calcule los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cos(y)-y\cos(x)-x+y}{x^2+y^2}$

(b) Para $a, b \geq 0$ dados:
$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{a+1}y^{b+1}}{x^2+y^2-xy}$

P3. Indique los valores de α para los cuales los siguientes límites existen:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^2-y^2|^\alpha}{x^2+y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|^\alpha}{x^2-xy+y^2}$

P4. Determine si las siguientes funciones son continuas

(a) Para $\alpha > 0$

$$f(x,y) = \begin{cases} (xy)^\alpha \cos\left(\dfrac{2\pi\alpha}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(b) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|\sin(y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

P5. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Encuentre los valores de α tal que la función definida previamente sea continua.

(b) Concluya que el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^3y^3}{(x^2+y^2)^1} > 1\}$ es abierto.

Resumen

- **[Función en varias variables]:** Dado un conjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{R}^d$, una función $f : A \to \mathbb{R}^p$ es una aplicación que a cada $x \in A$ le asocia un único vector $f(x) \in \mathbb{R}^p$. En notación simplificada,
$$f : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$$
$$x \mapsto f(x).$$
- **[Conjunto de nivel]:** Sea f una función escalar definida sobre un conjunto A de $\mathbb{R}^d$. Dado un número real c, el *conjunto de nivel* c de f (denotado $N_c(f)$) corresponde a la colección de puntos en A para los cuales el valor de f es precisamente c:
$$N_c(f) := \{x \in A : f(x) = c\}.$$
- **[Límites]:** El límite de una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ en el punto $x_0 \in \mathbb{R}^d$ es el vector $L \in \mathbb{R}^p$ si para cualquier sucesión (x_n) definida en A y convergente a x_0 (con $x_n \neq x_0$ siempre), la sucesión $(f(x_n))$ converge a $L \in \mathbb{R}^p$.
- **[Corolario Límites]:** Si existe una sucesión (x_n) definida en A y convergente a x_0, para la cual $(f(x_n))$ diverge, entonces f no tiene límite en x_0. Por otro lado, si dos sucesiones (x_n) e (y_n), definidas en A y convergentes a x_0, satisfacen $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$, entonces f tampoco tiene límite en x_0.
- **[Función continua]:** Una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ es continua en $x_0 \in A$ si para toda sucesión (x_n) definida en A y convergente a x_0, se tiene que la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(x_0)$.
Por otro lado, f es continua en A si es continua en cada punto de A.
- **[Continuidad en normas]:** Vista como una función de $\mathbb{R}^d$ hacia los reales no-negativos, toda norma $\|\cdot\|$ es continua.
- **[Continuidad y cerrados]:** Si una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ es continua en A, entonces la preimagen de todo conjunto cerrado en $\mathbb{R}^p$ es un conjunto cerrado incluido en A.

Algunos recordatorios útiles

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 0 \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0 \quad |\cos(x)| \leq 1 \quad |\sin(x)| \leq 1 \quad |\sin(x)| \leq |x|$$