

MA2001-1 Cálculo en Varias Variables**Profesor:** Javier Ramírez Ganga.**Auxiliar:** Anaís Muñoz P.**Capsula 2: Propiedades topología.**

25 de diciembre 2024

P1. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Demuestre las siguientes propiedades:

- (a) $\text{Int}(A^c) = (\text{Adh}(A))^c$.
- (b) Para A, B disjuntos:
 $\text{Adh}(A^c) = (\text{Int}(A))^c$.
- (c) $\text{Fr}(A \cup B) \subseteq \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$.
- (d) $\text{Fr}(\text{Fr}(A)) \subseteq \text{Fr}(A)$.

Resumen

- **[Conjunto abierto]:** Un conjunto C es abierto si y solo si se cumple:

$$\forall x \in C, \exists r > 0 \rightarrow B(x_0, r) \subset C$$

- **[Conjunto cerrado]:** C es cerrado si es el complemento de un conjunto abierto
ie: C cerrado $\iff C^c$ abierto

- **[Conceptos de conjuntos]**

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto, se tendrá:

- **[Frontera]:** Se define como frontera de A al conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ que cumplen lo siguiente para todo $r > 0$.

$$B(x; r) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x; r) \cap A^c \neq \emptyset$$

Se puede denominar como $\text{Fr}(A)$.

- **[Adherencia]:** Se define como Adherencia de A al conjunto de puntos que cumplen la siguiente condición para todo $r > 0$:

$$B(x; r) \cap A \neq \emptyset$$

Se denominará así, $\text{Adh}(A)$.

Notar que: Todo punto frontera cumple esta condición.

- **[Interior]:** Se define como interior de A a los puntos que cumplen la siguiente proposición:

$$\exists r > 0, B(x; r) \subseteq A$$

- **[Caracterización de conjuntos cerrados]** C es cerrado si cumple:

- $C = \text{Adh}(C)$
- $\text{Fr}(C) \subseteq C$
- Si $x_n \subseteq C$, entonces si $x_n \rightarrow x_0$, se tendrá que $x_0 \in C$