MA2001-1 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Javier Ramírez Ganga.
Auxiliar: Anaís Muñoz P.

Auxiliar 3: Topologia v2.

23 de diciembre 2024

P1. Realice el grafo y determine el interior, adherencia y frontera de los siguientes conjuntos:

(a)
$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < |x|, x^2 + y^2 \leq 5 \right\}$$

(b)
$$C = \left\{ \left(x, \frac{1}{n} \right) \mid n \in \mathbb{N}, x \in]0, 1] \right\}$$

P2. **[C1 2022 - Coordinado]**
Encuentre el interior, la adherencia, el derivado y la frontera de este conjunto. Además, determine si este conjunto es abierto, cerrado, compacto o tiene alguna otra propiedad.

Considere el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ definido por

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < |y| < 2 \right\}.$$

(a) Bosqueje el conjunto A y determine el interior $Int(A)$ y la frontera $Fr(A)$. Justifique su respuesta.

(b) Determine el conjunto de puntos de acumulación de A, es decir, el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \forall r > 0, (B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Justifique su respuesta.

(c) Señale si el conjunto A es abierto, cerrado o ninguna de las anteriores. Justifique su respuesta.

P3. Estudie la convergencia de la sucesión $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$ dada por:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (x_n, y_n) := \left(\frac{2n^2 + (-1)^n}{3n^2}, ne^{-n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

P4. Considere $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ normas equivalentes sobre E, un espacio vectorial.
Aclaración: Puede utilizar que las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes si existen constantes $C_1, C_2 > 0$ es decir puede usar que:

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1, \quad \forall x \in E.$$

(a) Muestre que para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ y $x \in E$, se tiene que:

$$\|x_n - x\|_1 \to 0 \iff \|x_n - x\|_2 \to 0.$$

(b) Muestre que $\forall A \subseteq E$:

$$A \text{ es cerrado en } (E, \|\cdot\|_1) \iff A \text{ es cerrado en } (E, \|\cdot\|_2).$$

Resumen

- **[Conjunto abierto]:** Un conjunto C es abierto sí y solo sí se cumple:

$$\forall x \in C, \exists r > 0 \to B(x_0, r) \subset C$$

- **[Conjunto cerrado]:** C es cerrado si es el complemento de un conjunto abierto
ie: C cerrado $\iff$ C^c abierto

- **[Conceptos de conjuntos]**
Sea A $\subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto, se tendrá:

  - **[Frontera]:** Se define como frontera de A al conjunto de puntos x$\in \mathbb{R}^n$ que cumplen lo siguiente para todo r>0.

  $$B(x;r) \cap A \neq \varnothing \wedge B(x;r) \cap A^c \neq \varnothing$$

  Se puede denominar como Fr(A).

  - **[Adherencia]:** Se define como Adherencia de A al conjunto de puntos que cumplen la siguiente condición para todo r>0:

  $$B(x;r) \cap A \neq \varnothing$$

  Se denominará así, Adh(A).
  Notar que: Todo punto frontera cumple esta condición.

  - **[Interior]:** Se define como interior de A a los puntos que cumplen la siguiente proposición:

  $$\exists r > 0, B(x;r) \subseteq A$$

- **[Sucesiones]** Se define como sucesión en $\mathbb{R}^n$ a una función f: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ denotada por $f(n) = X_n$ o bien (X_n).

- **[Sucesion acotada]** Una sucesión será **acotada** si existe M>0 tal que:

$$\|X_n\| \leq M; \forall n \in \mathbb{N}$$

- **[Convergencia de Sucesiones]** Se dirá que una sucesión X_n converge a X_0 si:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X_0$$

Por linealidad se tendrá que sea $X_n \to X_0$ e $Y_n \to Y_0$ con $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$

$$\lambda X_n + \beta Y_n \to \lambda X_0 + \beta Y_0$$

Notar que: Toda sucesión convergente es acotada.

- **[Subsucesión]:** dado X_n una subsucesión en $\mathbb{R}^n$ y $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función creciente,se tendrá que $(X_\alpha(n))$ será una subsucesión de X_n

- **[Sucesiones de Cauchy]** Se define como sucesión de Cauchy si para cualquier $\varepsilon > 0$:

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}; N, M \geq N_0; \|X_n - X_m\| < \varepsilon$$

- **[Espacio de Banach]**
Espacio vectorial normado cuyas sucesiones son de Cauchy en su totalidad.

- **[Caracterización de conjuntos cerrados]** C es cerrado si cumple:

  - $C = Adh(C)$
  - $Fr(C) \subseteq C$
  - Si $x_n \subseteq$ C, entonces si $x_n \to x_0$, se tendrá que $x_0 \in C$

- **[Teorema de Bolzano-Weierstrass]**
Toda sucesión $x_n \in \mathbb{R}^n$ acotada posee al menos una subsucesión convergente.

- **[Conjuntos compactos]:** Se dirá que C es compacto si toda sucesión en el conjunto posee una subsucesión que converge a un punto en C, por lo cual es cerrado y acotado.