**MA2001-1 Cálculo en Varias Variables**
**Profesor:** Javier Ramírez Ganga.
**Auxiliares:** Anaís Muñoz P y Alonso Núñez C.

# Auxiliar 2: Topologia v1.

20 de diciembre 2024

**P1. Normas**

Estudie si las siguientes funciones son o no norma.

a) $h(x, y, z) = \sqrt{ax^2 + by^2 + cz^2}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

b) Dado un real $p \in (0, 1)$, $f(x, y) = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$

c) Sean $\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta, \|\cdot\|_\gamma$ normas de $\mathbb{R}^d$, $x, y, z \in \mathbb{R}^d$, $g(x, y, z) = \text{máx}(\|x\|_\alpha, \|y\|_\beta, \|z\|_\gamma)$

**P2. Normas 2.0**

1. Dada una norma $||\cdot||$ en $\mathbb{R}^n$ y una matriz invertible P de $n \times n$ demuestre que la función $||x||_P = ||Px||$ es también una norma en $\mathbb{R}^n$.
2. Demuestre que en $\mathbb{R}^2$ la función $||\vec{x}||_e = (\frac{x_1^2}{9} + 4x_2^2)^{\frac{1}{2}}$ es una norma y haga un dibujo de $B(0{,}1) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : ||\vec{x}||_e < 1\right\}$.

**P3. Propiedades de la norma**

1. Desigualdad triangular inversa:
Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^d$, pruebe que para cada $x, y \in \mathbb{R}^d$, tenemos que:
$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$
2. Ley del paralelogramo:
Muestre que si $\|\cdot\|$ es norma euclideana, entonces, se tiene la identidad:
$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2\right)$$

**P4. Visualizando (Bolas jiji)**

Para el caso de dimensión 2, bosqueje las bolas $B_\infty(0, 1), B_1(0, 1)$ y $B_2(0, 1)$.

**P5. Abierto por definicion**

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \neq y$, se cumple para $r > 0$:
$$A = B(x; r) \cap B(y; r) \neq \varnothing$$
Demuestre por definición que A es abierto.

**Resumen**

- **[Norma]:** Tomando un espacio vectorial A sobre un cuerpo K, diremos que la función $\|\cdot\| : A \to [0, +\infty[$ si cumple las siguientes proposiciones.
  - *Positividad:*
    $\|x\| \geq 0, \forall x \in A$
  - *Cero si y solo si cero del espacio:*
    $\|x\| = 0 \iff x = 0_A$
  - *Desigualdad triangular:*
    $\forall x, y \in A, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
  - *"Los escalares salen del chat":*
    $\forall \lambda \in K, x \in A, \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
- **[Norma P]:** Sea p $\geq$ 1, donde $x_i$ es la coordenada i-esima del vector x $\in \mathbb{R}^n$, la norma P es definida como:
  $\|x\|_p = \sum_{i=1}^{n} (|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$
  *Datazo: Si p=2, se define la Norma Euclideana*
- **[Producto interno]:** Una aplicación (función) define un producto interno en $\mathbb{R}^n$ si cumple lo siguiente:
  - **Positividad:**
    $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle \geq 0$
    $\langle x, y \rangle = 0 \iff x = 0 \vee y = 0$
  - **Linealidad:**
    $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R},$
    $\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
  - **Simetría:**
    $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- **[Desigualdad de Cauchy-Schwartz]:** Tomando norma euclideana, se tiene que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$

  $$\langle x, y \rangle \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

  Notar que para este caso, el producto interno se definirá como:

  $$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

- **[Equivalencia de Normas]:** Sean dos normas denotadas como $\|x\|_\alpha, \|x\|_\beta$ ,serán equivalentes si existen $A_1, A_2 > 0$ que cumplen:

  $$A_1 \|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq A_2 \|x\|_\alpha$$

- **Def (Bola).** Sea $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. y $x_0 \in E, r > 0$. Definimos la **bola abierta** centrada en $x_0$ de radio $r$ al conjunto:

  $$B(x_0; r) := \{x \in E \mid \|x - x_0\| < r\}$$

- **Def (Bola cerrada).** Sea $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. y $x_0 \in E, r > 0$. Definimos la **bola cerrada** centrada en $x_0$ de radio $r$ al conjunto:

  $$\overline{B}(x_0; r) := \{x \in E \mid \|x - x_0\| \leq r\}$$

- **[Conjunto abierto]:** Un conjunto C es abierto sí y solo sí se cumple:

  $$\forall x \in C, \exists r > 0 \to B(x_0, r) \subset C$$

- **[Conjunto cerrado]:** C es cerrado si es el complemento de un conjunto abierto
  ie: $C$ cerrado $\iff C^c$ abierto