

P.11 • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ usamos el criterio del cociente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{2(2n+1)}$$
$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{1}{4} < 1$$

$\Rightarrow$ la sumatoria converge

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n(n+1)^{1/n}}$ notemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt[n]{n+1}} \rightarrow \infty$

$\therefore$ la sumatoria no converge, pues debe cumplir
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

• $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \cdot \tan^{-1}(1/2n)$ Recordemos que $\cos(n\pi) = (-1)^n$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \tan^{-1}(1/2n)$, así que usaremos el criterio de Leibniz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^{-1}(1/2n) = 0 \quad \checkmark$$

$\frac{d}{dx} \tan^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ es creciente, pero $\frac{1}{2n}$ es decreciente

$\therefore \tan^{-1}(1/2n)$ es decreciente por ~~de~~ criterio c.i.g.m

$\Rightarrow$ La sumatoria converge por criterio de Leibniz

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{\sqrt{n^4+1}}$ usamos el criterio de convergencia absoluta

$$\left| \frac{\sin(n^2)}{\sqrt{n^4+1}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n^2} \wedge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{\sqrt{n^4+1}} \text{ converge.}$

P2] Como $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ converge

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1+a_n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Ahora usando el criterio del cociente por queda.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{1+a_n}}{\frac{a_n}{1+a_n}} = 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge.}$$

P3) Para encontrar el valor de α usamos el criterio de cociente.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{(n+1)!}}{(n+1)^{(n+1)\alpha}}}{\frac{\sqrt{n!}}{n^{n\alpha}}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(n+1)!}{n!}} \cdot \frac{n^{n\alpha}}{(n+1)^{n\alpha} \cdot (n+1)^\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{1/2-\alpha} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n\alpha}}$$

Si $\alpha = 1/2$ nos queda $\frac{1}{\sqrt{e}} < 1$

Si $\alpha > 1/2$ nos queda $0 < 1$

Si $\alpha < 1/2$ el límite diverge

$\therefore$ converge $\forall \alpha \geq 1/2$

P4) Si $\sum a_n^2$ converge $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 0$

usando el criterio del cociente nos queda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n^2}{1+a_n^2}}{a_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a_n^2} \doteq 1 > 0$$

$\therefore$ Como $\sum a_n^2$ converge también lo hace $\sum \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ "