

P.41 • $\int_0^1 \ln(x) dx$ utiliser I.P.P.

$$u = \ln(x), \quad dv = dx$$

$$\Rightarrow du = \frac{1}{x} dx, \quad v = x$$

$$\Rightarrow \ln(x) \cdot x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot x dx$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \cdot x \Big|_0^1 - \underbrace{\ln(0) \cdot 0}_{\infty \cdot 0} - x \Big|_0^1 \rightarrow -1$$

$\infty \cdot 0$ calculer la limite.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{utiliser L'H}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = 0 \quad \therefore \int_0^1 \ln(x) dx = -1$$

P.11 • $\int_0^1 \ln(x) dx$ utiliser I.P.P.

$$u = \ln(x), \quad dv = dx$$

$$\Rightarrow du = \frac{1}{x} dx, \quad v = x$$

$$\Rightarrow \ln(x) \cdot x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot x dx$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \cdot x \Big|_0^1 - \underbrace{\ln(0) \cdot 0}_{\infty \cdot 0} - x \Big|_0^1 \rightarrow -1$$

$\infty \cdot 0$ calculer la limite.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{utiliser L'H}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0 \quad \therefore \int_0^1 \ln(x) dx = -1$$

• $\int_0^1 \frac{\cos(x)}{x^2} dx$ sabemos que $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ diverge así que usaremos el criterio del cociente.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos(x)}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 1 \neq 0 \quad \therefore \text{ como } \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx \text{ diverge, también lo hace } \int_0^1 \cos(x) \frac{1}{x^2} dx.$$

• $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin(x) dx$ Para esto usaremos el criterio de comparación.

$e^{-x} \sin(x) \leq e^{-x} \quad \forall x \in (0, \infty)$ y la integral de e^{-x} nos queda

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1$$

$\therefore$ Como la integral de e^{-x} converge, también lo hará la de $e^{-x} \sin(x)$.

• $\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1}(x)}{x^2} dx$ separamos la integral en 2 partes

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{\tan^{-1}(x)}{x^2} dx + \int_1^{\infty} \frac{\tan^{-1}(x)}{x^2} dx$$

usando el criterio del cociente en la primera integral con $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$, la cual diverge nos queda

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1}(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1}(x)}{x} = 1 \neq 0$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{\tan^{-1}(x)}{x^2} dx \text{ diverge} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1}(x)}{x^2} dx \text{ también}$$

P2/a) P.D.Q $\int_0^{\infty} |f'(x)| dx$ converge.

Como $f(x)$ es decreciente $\Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow |f'(x)| = -f'(x)$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} |f'(x)| dx = -\int_0^{\infty} f'(x) dx = -f(x) \Big|_0^{\infty}$$

$$\Leftrightarrow -\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + f(0) = f(0), \therefore \text{converge.}$$

b) P.D.Q $\int_0^{\infty} f(x) \cdot \sin(3x) dx$

usamos I.P.P.

$$u = f(x), \quad dv = \sin(3x) dx$$

$$du = f'(x) dx, \quad v = -\frac{\cos(3x)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\infty} f(x) \sin(3x) dx = -f(x) \cdot \frac{\cos(3x)}{3} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} f'(x) \cdot \frac{\cos(3x)}{3} dx$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -f(x) \cdot \frac{\cos(3x)}{3} = 0 + \frac{f(0)}{3}, \text{ entonces nos queda ver la otra integral.}$$

usamos el criterio de convergencia absoluta

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \left| \frac{f'(x) \cdot \cos(3x)}{3} \right| dx \leq \int_0^{\infty} |f'(x)| dx \rightarrow \text{converge}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} f(x) \sin(3x) dx \text{ converge.}$$

P3 | • Aquí tenemos que separar la integral en 2 partes.

$$A = \left| \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx \right| \wedge B = \int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$$

Primero demostrare que $A = B$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx \quad \text{c.v. } u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x^2} dx$$

$$x=1 \Rightarrow u=1$$

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow u=0$$

$$\Leftrightarrow \int_1^0 \frac{\ln(1/u)}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \frac{1}{u^2} du = - \int_0^1 \frac{\ln(u)}{1+u^2} du$$

$$\Rightarrow A = -B$$

• Ahora para ver que es finita usamos el criterio del cociente con $\ln(x)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{-\frac{\ln(x)}{1+x^2}} = 1 \neq 0$$

• usamos el $\frac{0}{0}$ porque deben ser positivas las funciones.

y como $\int_0^1 \ln(x) dx$ converge $\int_0^1 \ln(x)/(1+x^2) dx$ también.

P4) • $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$ c.v. $u = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow u^2 = 1-x$
 $\Rightarrow du = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} dx$ $x=0, u=1$
 $x=1, u=0$

$\Leftrightarrow \int_1^0 (1-u^2)(-2) du = 2u - \frac{2u^3}{3} \Big|_0^1 \rightarrow$ usar el cambio de límite de int.
 $= 2 - \frac{2}{3}$
 $= \frac{4}{3}$

• ahora calculamos Vol

$2\pi \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} dx$ usar el mismo c.v.
 $x^2 = (-u^2+1)^2$

$\Leftrightarrow 2\pi \int_0^1 (1-2u^2+u^4) \cdot 2 du$ $\rightarrow$ usar el cambio de límites de integración

$\Leftrightarrow 4\pi \left[u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 \right] \Big|_0^1$

$\Leftrightarrow 4\pi \left[1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right]$

$= \frac{32}{15} \pi$