

Auxiliar 11: Integrales impropias

Profesor: Juan José Maulen

Auxiliar: Iñaki Escobar Cano

P1. Determine la convergencia de las siguientes integrales:

- $\int_0^1 \ln(x) dx$
- $\int_0^1 \frac{\cos(x)}{x^2} dx$
- $\int_0^\infty e^{-x} \sin(x) dx$
- $\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{x^2} dx$

P2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función decreciente y derivable en $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$:

- (a) Pruebe que $\int_0^\infty |f'(x)| dx$ converge.
- (b) Pruebe que $\int_0^\infty f(x) \sin(3x) dx$ converge.

P3. Sea $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$. Pruebe que las áreas A y B son finitas y que, más aún, son iguales.

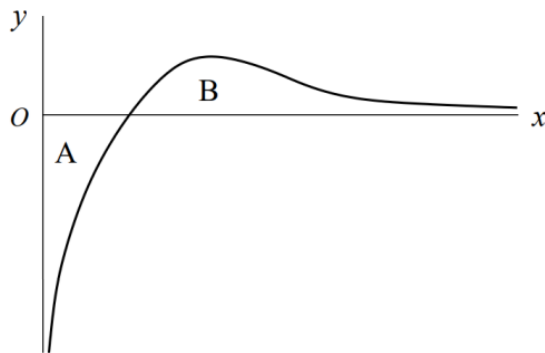


Figura 1

P4. La función $f(x)$ definida por $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ admite una asíntota en $x = 1$.

- (a) Demuestre que el área de la región entre la curva $y = f(x)$, su asíntota y el eje OX existe y calcule su valor.
- (b) Calcule, si existe, el volumen de revolución en torno al eje OY generado por la rotación de la región anteriormente descrita.

Resumen:

Integral Impropia 1ra Especie: Sea $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que f es integrable en $[a, +\infty)$ ssi:

- $\forall x \in (a, +\infty)$, f es integrable en $[a, x]$.
- Existe el límite definido por

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(x) dx$$

Integral Impropia de 2da Especie: Sea $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función no acotada, diremos que f es integrable en $[a, b)$ ssi:

- $\forall x \in (a, b)$, f es integrable en $[a, x]$.
- El límite

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(x) dx$$

existe.

Criterio de Comparación: Sean f, g funciones continuas en $[a, +\infty)$ tales que:

- $b \geq a$, $\forall x \geq b$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Entonces:

$$\text{Si } \int_a^{+\infty} g \text{ converge} \implies \int_a^{+\infty} f \text{ converge.}$$

Criterio del Cociente: Sean f, g funciones continuas en $[a, +\infty)$ y no negativas en $[b, +\infty)$, donde $b \geq a$ y tales que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0,$$

entonces las integrales impropias $\int_a^{+\infty} f$ y $\int_a^{+\infty} g$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

Convergencia Absoluta: Sea $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que $\int_a^{+\infty} f$ es absolutamente convergente si:

$$\int_a^{+\infty} |f| \text{ converge.}$$

Teorema: Sea $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, si $\int_a^{+\infty} f$ converge absolutamente, entonces $\int_a^{+\infty} f$ converge.