

P. 1 • Primero encontremos los ceros.

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = -1$$

$$\bullet V_{OX} = \pi \cdot \int_{-1}^1 \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^2 dx$$

$$\Leftrightarrow = 2\pi \int_0^1 \frac{1-2x^2+x^4}{1+2x^2+x^4} dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{1+2x^2+x^4}{1+2x^2+x^4} - \frac{4x^2}{1+2x^2+x^4} dx$$

$$= 2\pi \cdot 1 - 2\pi \int_0^1 \frac{4x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$C.V: u = \tan^{-1}(x) \Rightarrow \tan(u) = x$$

$$du = \frac{dx}{1+x^2} \quad x=0 \Rightarrow u=0$$

$$x=1 \Rightarrow u=\pi/4$$

$$= 2\pi - 2\pi \int_0^{\pi/4} \frac{4 \cdot \tan^2(u)}{1+\tan^2(u)} du$$

$$= 2\pi - 2\pi \int_0^{\pi/4} \frac{4 \tan^2(u)}{\sec^2(u)} du = \int_0^{\pi/4} \sec^2(u) du = \frac{1-\cos(2u)}{2}$$

$$= 2\pi - 8\pi \int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos(2u)}{2} du$$

P21 Igualamos los volúmenes

$$\frac{22\pi}{5} = 2\pi \int_0^1 x \left[ x^m + \frac{1}{4} \right] dx + 2\pi \int_1^2 x \cdot \frac{5}{4} dx$$

$$\frac{11}{5} = \int_0^1 x^{m+1} + \frac{x}{4} dx + \int_1^2 \frac{5}{4} x dx$$

$$= \left. \frac{x^{m+2}}{m+2} + \frac{x^2}{8} \right|_0^1 + \left. \frac{5}{8} x^2 \right|_1^2$$

$$\frac{11}{5} = \frac{1}{m+2} + \frac{1}{8} + \frac{5}{2} - \frac{5}{8}$$

$$\frac{11}{5} = \frac{1}{m+2} + 2$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{m+2} \Rightarrow m = 3$$

P3 | Sabemos que  $V_{0x} = \pi \int_0^x (f(t))^2 dt$  y  $V_{0y} = 2\pi \int_0^x t f(t) dt$

y queremos  $V_{0x} = V_{0y} \Leftrightarrow V_{0x} - V_{0y} = 0$

Definamos la función  $g(x) = V_{0x} - V_{0y} = 0$

y si derivamos  $g(x)$  por TFC nos queda

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow g'(x) = [f(x)]^2 \pi - 2\pi \cdot x \cdot f(x) = 0 \\ &= \pi f(x) [f(x) - 2x] = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = 0 \vee f(x) = 2x$$

pero  $f(x) = 0$  no cumple  $f(x) > 0$ , por lo cual  
la función que ~~satis~~ cumple lo pedido es  $f(x) = 2x$ .

P41 Tenemos las funciones  $x - 2y = 0$  y  $y^2 = 4x$

$$\Leftrightarrow y = x/2 \text{ y } y = \sqrt{x} \cdot 2$$

Y igualamos ambos para obtener las intersecciones.

$$x/2 = \sqrt{x} \cdot 2 \quad |()^2 \quad x^2/4 = 4x$$

$$x^2 - 16x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 16,$$

Como  $2\sqrt{x} > x/2$  el volumen nos queda

$$V_{0x} = \pi \int_0^{16} 4x - \frac{x^2}{4} dx$$

$$= \pi \left[ \frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{12} \right]_0^{16}$$

$$= \frac{512}{3} \pi,$$

P5 Para esto usaremos el "Teorema de Pappus"

que dice  $V = 2\pi \cdot d \cdot A$ , con  $A$  siendo el área y  $d$  el centroide.

El centroide se calcula  $\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot f(x) dx$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2} f^2(x) dx$$

Calculamos  $A$ :  $\int_0^1 x - 1 - (x^2 - 1) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - x - \frac{x^3}{3} + x \right]_0^1$   
 $= 1/6$

$$\Rightarrow \bar{x} = 6 \cdot \int_0^1 x [(x-1) - (x^2-1)] dx$$

$$= 6 \cdot \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\bar{y} = 6 \cdot \int_0^1 \frac{1}{2} [(x-1)^2 - (x^2-1)^2] dx$$

$$= 3 \cdot \left[ \int_0^1 x^2 - 2x + 1 - x^4 + 2x^2 - 1 dx \right]$$

$$3 \cdot \left[ x^3 - x^2 - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = -3/5$$

$$\Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (1/2, -3/5)$$

por último nos falta la distancia del centroide a la recta.

$$d = \left| \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \quad x - 1 - y = 0$$

$$\Rightarrow d = \left| \frac{1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 1 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \right| = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{20}$$

$$\therefore V = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{20} \cdot 1/6 = \frac{\sqrt{2} \pi}{60} "$$