Auxiliar extra C3

Profesor: Juan José Maulen
Auxiliar: Iñaki Escobar Cano

P1. Considere la función $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Encuentre $n \in \mathbb{N}^*$ y funciones escalonadas $e^-, e^+ : [0, 2] \to \mathbb{R}$ asociadas a la partición:

$$P = \left\{ \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n}{n}, \frac{n+1}{n}, \ldots, \frac{2n}{n} \right\}$$

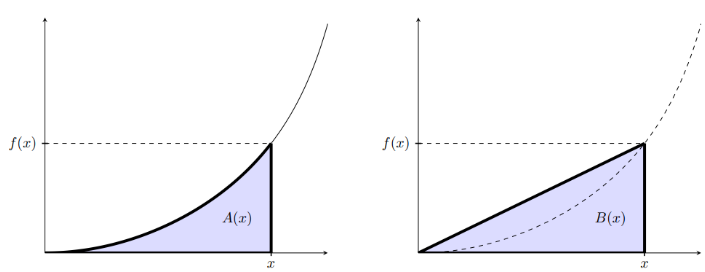
tales que $e^-(x) \leq f(x) \leq e^+(x)$ para todo $x \in [0, 2]$ y

$$\int_0^2 (e^+ - e^-)\, dx \leq 10^{-3}.$$

P2. Considere la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \tan(t^2)$. Para $x \in [0, 1]$, sea $A(x)$ el área bajo la curva de f en el intervalo $[0, x]$, como muestra la Figura 1a. Sea además $B(x)$ el área del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(x, 0)$ y $(x, f(x))$, como muestra la Figura 1b.

Calcule el límite:

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{A(x)}{B(x)}.$$



(a) El área $A(x)$. (b) El área $B(x)$.

Figura 1

P3. Sea $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ una función biyectiva y derivable en $(0, \infty)$ tal que $f(0) = 0$.

Muestre que

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt$$

satisface que:

$$g'(x) = f(x) + f'(x)x.$$

Concluya que $g(x) = xf(x)$.

P4. Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin(t^2)\,dt}{1 - e^{x^6}}.$$