

P1) • Como f es continua, es Riemann integrable. Al ser biyectiva, f^{-1} también lo es, por lo cual también es Riemann integrable.

- Para demostrar que f^{-1} es creciente lo haremos por contradicción.

Sean $x, y \in [c, d] \mid x < y$

$$\Rightarrow x < y \Rightarrow f^{-1}(x) > f^{-1}(y) \mid f(c)$$

$$f(f^{-1}(x)) > f(f^{-1}(y))$$

$$\Leftrightarrow x > y \quad \nrightarrow$$

∴ f^{-1} es estrictamente creciente.

$$\bullet \quad S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(f) \cdot \Delta x_i$$

$$M_i = \sup \{ f(x), x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

$$\Rightarrow M_i = f(x_i) \text{ porque es creciente}$$

$$\rightarrow (f^{-1}, Q) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x$$

Oja, eto ven de Q

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow m_i = f^{-1}(x_{i-1}) \text{ porque } f^{-1} \text{ es creciente}$$

$$\Leftrightarrow \rightarrow (f^{-1}, Q) = \sum_{i=1}^n \overbrace{f^{-1}(f(x_{i-1}))}^{-1} \cdot [f(x_i) - f(x_{i-1})]$$

$$1 \quad S(f, P) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot [x_i - x_{i-1}]$$

$$\text{Entonces } \rightarrow (f^{-1}, Q) + S(f, P)$$

$$\sum_{i=1}^n (x_{i-1}) [f(x_i) - f(x_{i-1})] + f(x_i) [x_i - x_{i-1}]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot x_i - f(x_{i-1}) \cdot x_{i-1}$$

$$\Leftrightarrow f(x_n) \cdot x_n - f(x_0) \cdot x_0$$

$$\Leftrightarrow d \cdot b - c \cdot a$$

• Tenemos que

$$S(f, P) + r(f^T, Q) = b \cdot d - a \cdot c \quad / |P| \rightarrow 0$$

$$\int_a^b f + \lim_{|P| \rightarrow 0} [r(f^T, Q)] = b \cdot d - a \cdot c$$

- al tomar que $|P| \rightarrow 0$ es decir $x_i - x_{i-1} \approx 0$
 $\Rightarrow f(x_i) - f(x_{i-1}) \approx 0 \Rightarrow |Q| \rightarrow 0$

$$\therefore \lim_{|P| \rightarrow 0} [r(f^T, Q)] = \lim_{|Q| \rightarrow 0} [r(f^T, Q)] = \int_c^d f^T$$

$$\Rightarrow \int_a^b f + \int_c^d f^T = b \cdot d - a \cdot c //$$

P2) $f(x) = 1 - x$, por lo cual es integrable.

Para hacer que tenga n términos tenemos $n-1$ intervalos $\Rightarrow \Delta x_i = \frac{2}{n-1} \Rightarrow x_i = \frac{2i}{n-1}$

~~La~~ $r(f, P) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \cdot \Delta x_i$, como f es decreciente

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \left[1 - \frac{2(i-1)}{n-1} \right] \cdot \frac{2}{n-1}$$

$$= \frac{2}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} 1 - \frac{2i}{n-1}$$

$$= \frac{2}{n-1} \cdot \left\{ n-1 - \left(\frac{2}{n-1} \right) \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} \right\}$$

$$= \frac{-1}{n-1}$$

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i \cdot \Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \left[1 - \frac{2(i-1)}{n-1} \right] \cdot \frac{2}{n-1}$$

$$= \frac{2(n-1)}{n-1} - \frac{2}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i-1 = \frac{2(n-1)}{n-1} - \frac{2}{n-1} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 2 - \frac{(n-1)(n-2)}{n-1} = 2 - (n-2) = 2 - n + 2 = 4 - n$$

$$= 2 - \left(\frac{2}{n-1}\right)^2 [(n-1)n - (n-1)]$$

$$= \frac{2}{n-1}$$

$$\Rightarrow r(f, P) \leq \int_0^2 f(x) dx \leq S(f, P)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{n-1} \leq \int_0^2 f(x) dx \leq \frac{2}{n-1}$$

Logo sabemos que $\lim_{|P| \rightarrow 0} r(f, P) = \lim_{|P| \rightarrow 0} S(f, P) = \int_0^2 f(x) dx$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{n-1} = \int_0^2 f(x) dx$$

$$\Rightarrow 0 = \int_0^2 f(x) dx$$

P31

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x (x-1) \cdot \sin(t^2) dt}{\int_{x^2}^{x^3} \sin(t^2-1) dt} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \int_1^x \sin t^2 dt}{\lim_{x \rightarrow 1} \int_{x^2}^{x^3} \sin(t^2-1) dt}$$

$\rightarrow 0 \quad \rightarrow 0$
 $\rightarrow 0$

Como es de la forma $0/0$ usamos L'H

$$\lim \frac{d}{dx} (x-1) \cdot \int_1^x \sin(t^2) dt = \int_1^x \sin(t^2) dt + (x-1) \cdot \sin(x^2)$$

$$\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \sin(t^2-1) dt = \sin(x^6-1) \cdot 3x^2 + \sin(x^4-1) \cdot 2x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x \sin(t^2) dt + (x-1) \cdot \sin(x^2)}{\sin(x^6-1) \cdot 3x^2 + \sin(x^4-1) \cdot 2x} = 0/0$$

$\rightarrow 0 \quad \rightarrow 0$
 $\rightarrow 0 \quad - \quad \rightarrow 0$

usamos L'H otra vez

$$\frac{d}{dx} \int_1^x \sin(t^2) dt + (x-1) \sin(x^2) = \sin(x^2) + \sin(x^2) + (x-1) \cos(x^2) \cdot 2x$$

$$\frac{d}{dx} [\sin(x^6-1) \cdot 3x^2 - \sin(x^4-1) \cdot 2x]$$

$$= \cos(x^6-1) \cdot 6x^5 \cdot 3x^2 - \sin(x^6-1) \cdot 6x$$

$$+ \cos(x^4-1) \cdot 4x^3 \cdot 2x - 2 \sin(x^4-1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin(x^2) + 2x(x-1) - \cos(x^2)}{\cos(x^6-1) \cdot 18x^7 + \sin(x^6-1) 6x - \cos(x^4-1) \cdot 8x^4 - 2 \sin(x^4-1)}$$

$$= \frac{2 \cdot \sin(1)}{18 + 8} = \frac{\sin(1)}{5}$$

P4) P.D.Q $\left| \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x} \cdot \sin(x)}{1+x^2} dx \right| \leq \frac{\pi}{12e}$

Sabemos que $|\int f dx| \leq \int |f| dx$

$$\Rightarrow \left| \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x} \sin(x)}{1+x^2} dx \right| \leq \int_1^{\sqrt{3}} \left| \frac{e^{-x} \cdot \sin(x)}{1+x^2} \right| dx$$

Sabemos que $|\sin(x)| \leq 1 \quad \forall x$ y $\frac{e^{-x}}{1+x^2} > 0$

$$\leq \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}}{1+x^2} dx \leq \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}}{1+x^2} dx \rightarrow \text{porque } e^{-x} \text{ es decreciente}$$

$$= \frac{1}{e} \cdot \arctan(x) \Big|_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{e} [\arctan(\sqrt{3}) - \arctan(1)]$$

$$= \frac{1}{e} \left[\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right]$$

$$= \frac{\pi}{12 \cdot e}$$