

Auxiliar 8: Riemann parte 2 y TFC

Profesor: Juan José Maulen

Auxiliar: Iñaki Escobar Cano

P1. Considere una función $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ continua, biyectiva y estrictamente creciente.

- Mostrar que f es integrable y que f^{-1} es integrable y estrictamente creciente.
- Considerar la partición $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ y su correspondiente partición $Q = \{f(x_0), \dots, f(x_n)\}$ del intervalo $[c, d]$. Demostrar que:

$$S(f, P) + s(f^{-1}, Q) = bd - ac$$

- Concluir que:

$$\int_c^d f^{-1} = bd - ac - \int_a^b f$$

P2. Sea $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 - x$. Indique por qué f es integrable en $[0, 2]$. Calcule la suma superior e inferior asociada a f y una partición equiespaciada de $[0, 2]$ de n términos. Deduzca el valor de la integral:

$$\int_0^2 f(x) dx$$

P3. Calcule el valor del límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x (x-1) \sin(t^2) dt}{\int_{x^2}^{x^3} \sin(t^2 - 1) dt}$$

P4. Demostrar que:

$$\left| \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x} \sin(x)}{1+x^2} dx \right| \leq \frac{\pi}{12e}$$