

P 1) Sea $f(x) = 1/x$, $q = \sqrt[n]{5}$

La suma inferior y superior, considerando que f es decreciente, queda

$$M_k = \max f(x), x \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$= f(x_{k-1}) = \frac{1}{5^{\frac{k-1}{n}}}$$

$$m_k = \inf f(x)$$

$$= f(x_k) = \frac{1}{5^{k/n}}$$

$$\Rightarrow S(f, P) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{5^{\frac{k-1}{n}}} \cdot \underbrace{(5^{\frac{k}{n}} - 5^{\frac{k-1}{n}})}_{x_i - x_{i-1}}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{5^{(k-1)/n}}{5^{(k-1)/n}} (5^{1/n} - 1)$$

$$= n(5^{1/n} - 1)$$

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{5^{k/n}} (5^{k/n} - 5^{(k-1)/n})$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{5^{k/n}}{5^{k/n}} (1 - 5^{-1/n})$$

$$= n(1 - 5^{-1/n})$$

• Calculamos $S(f, P) - s(f, P)$

$$\Leftrightarrow n(5^{1/n} - 1) - n(1 - 5^{-1/n})$$

$$\Leftrightarrow n[(5^{1/n} - 1) - (1 - 5^{-1/n})]$$

$$\Leftrightarrow n \left[(5^{1/n} - 1) - \frac{(5^{1/n} - 1)}{5^{1/n}} \right]$$

$$\Leftrightarrow n(5^{1/n} - 1) \left(1 - \frac{1}{5^{1/n}} \right)$$

$$\Leftrightarrow n(5^{1/n} - 1) \frac{(5^{1/n} - 1)}{5^{1/n}} \geq 0$$

Ahora tomamos límite.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [S(f, P) - s(f, P)] = \lim_{n \rightarrow \infty} n(5^{\frac{1}{n}} - 1) \frac{(5^{\frac{1}{n}} - 1)}{5^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(5)}{1} = \ln(5)$$

$\rightarrow 0/1$

$$= 0$$

Entonces f sería integrable ya que cumple el criterio de Riemann.

P21 P.D.Q $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{1/4}} + \frac{1}{e} \right) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{e^{1/4}} \right)$

con $P = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

Notamos que $f(x) = e^{-x^2}$ es decreciente, por lo tanto para la suma inferior usamos el valor "más a la derecha" del intervalo y lo contrario para la superior.

$$S(f, P) = m_1 \cdot \left(\frac{1}{2} - 0\right) + m_2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= e^{-\left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2} + e^{-1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{1/4}} + \frac{1}{e} \right)$$

$$S(f, P) = M_1 \cdot \left(\frac{1}{2} - 0\right) + M_2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= e^{-0^2} \cdot \frac{1}{2} + e^{-\left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^{1/4}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{e^{1/4}} \right)$$

Como sabemos que $S(f, P) \leq \int_0^1 f(x) dx \leq S(f, P)$

$\Rightarrow$ Queda demostrado lo pedido

P31 Sea $a_n = \int_0^n q^x dx$, $0 < q < 1$

- Como q^x es continua en $[0, n]$ $\forall n$, será Riemann integrable, lo cual implicaría que a_n está bien definida.

Para ver si es estrictamente creciente, se probará que $a_n - a_{n-1} > 0 \quad \forall n$

$$a_n - a_{n-1} = \int_0^n q^x dx - \int_0^{n-1} q^x dx = \int_{n-1}^n q^x dx > 0$$

ya que q^x es mayor que cero en $[n-1, n]$.

- Se tiene $P = \{0, 1, 2, \dots, n\} \Rightarrow \Delta x_i = 1 \quad \forall i, x_i = i$

Definimos nuestras funciones escalonadas para los sumos de Riemann.

$$f_- \rightarrow m_i(f) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$f_+ \rightarrow M_i(f) = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$\therefore \text{Suma inferior} \quad \int_a^b f_- = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x = S$$

$$\text{" superior} \quad \int_a^b f_+ = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x = S$$

Como q^x es decreciente, se tiene que $m_i = q^{(i-1)}$

$$\Rightarrow S = \sum_{i=1}^n q^i = \left[\sum_{i=0}^n q^i \right] - 1 = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - 1$$
$$= \frac{q(1 - q^n)}{1 - q}$$

$$S = \sum_{i=1}^n q^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

• Por definición sabemos que

$$S \leq \int_0^n q^x dx \leq S$$

$$\Leftrightarrow \frac{q(1 - q^n)}{1 - q} \leq \int_0^n q^x dx \leq \frac{1 - q^n}{1 - q} < \frac{1}{1 - q}$$

• Entonces tomamos el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q(1 - q^n)}{1 - q} \leq \int_0^\infty q^x dx < \frac{1}{1 - q}$$

$$\Leftrightarrow \frac{q}{1 - q} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \frac{1}{1 - q}$$

• Como a_n es estrictamente creciente y acotado, a_n converge.

P4 P.D.Q $\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{i=2}^n f(i) \quad \forall n \geq 2$

con $P = \{1, 2, \dots, n\}$

$\Rightarrow \Delta x_i = 1 \quad \forall i \quad \wedge \quad x_i = i+1$

Para obtener usamos los sumos inferiores y superiores

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1} m_i$$

Aquí $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

pero como f es creciente $\Rightarrow m_i = f(x_{i-1})$
 $= f(i)$

$\therefore S(f, P) = \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$

- Para la suma superior

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i, \quad M_i = f(i+1)$$

$\Rightarrow S(f, P) = \sum_{i=1}^{n-1} f(i+1) = \sum_{i=2}^n f(i) \quad / \text{ Cambio de índice}$

y como siempre se cumple

$$S(f, P) \leq \int_1^n f \leq S(f, P)$$

Se tiene $\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f \leq \sum_{i=2}^n f(i)$ "

• Para $f(x) = \ln(x)$ sería

$$\sum_{i=1}^{n-1} \ln(i) \leq \int_1^n \ln(x) dx \leq \sum_{i=2}^n \ln(i)$$

usando la indicación y propiedad del logaritmo se tiene

$$\Leftrightarrow \ln \left[\prod_{i=1}^{n-1} i \right] \leq n \cdot \ln(n) - n + 1 \leq \ln \left[\prod_{i=1}^n i \right] \quad \begin{matrix} \text{multiplicamos} \\ \text{por 1} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \ln[(n-1)!] \leq n \cdot \ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!)$$

$$\Leftrightarrow \ln[(n-1)!] \leq \ln(n^n) + \ln(e^{-(n-1)}) \leq \ln(n!)$$

$$\Leftrightarrow \ln[(n-1)!] \leq \ln[n^n \cdot e^{-(n-1)}] \leq \ln(n!) / e'$$

$$\Rightarrow (n-1)! \leq n^n \cdot e^{-(n-1)} \leq n! "$$