Auxiliar 7: Riemann

Profesor: Juan José Maulen
Auxiliar: Iñaki Escobar Cano

P1. Considere la función $f : [1, 5] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

- Calcule las sumas inferior $s(f, P)$ y superior $S(f, P)$ si $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una partición que sigue una progresión geométrica, es decir $x_k = q^k$, con $k = 0, \ldots, n$, considerando $q = \sqrt[n]{5}$.
- Calcule $S(f, P) - s(f, P)$. Sabiendo que $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{5} - 1) = \ln(5)$, pruebe que $\lim_{n\to\infty} (S(f, P) - s(f, P)) = 0$ y concluya que f es integrable. Justifique adecuadamente sus respuestas.

P2. Demostrar que:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{1/4}} + \frac{1}{e}\right) \leq \int_0^1 e^{-x^2}\, dx \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e^{1/4}}\right)$$

Considerando la partición $P = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

P3. Considere la sucesión $a_n = \int_0^n q^x\, dx$, con $0 < q < 1$.

- Explique por qué a_n está bien definida, es decir, por qué q^x es Riemann integrable en $[0, n]$. Muestre que a_n es estrictamente creciente.
- Calcule las sumas de Riemann inferior y superior para q^x y la partición $P = \{0, 1, \ldots, n\}$.
- Utilice las sumas anteriores para obtener las siguientes cotas para a_n:
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{q}{1-q}(1 - q^n) < \int_0^n q^x\, dx < \frac{1}{1-q}$
- Concluya que a_n converge y que $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ satisface:

$$\frac{q}{1-q} \leq a \leq \frac{1}{1-q}$$

P4. Sea $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ una función no negativa y creciente.

- Usando la partición $P = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, pruebe que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)\, dx \leq \sum_{i=2}^{n} f(i), \quad \forall n \geq 2.$$

- Considere $f(x) = \ln(x)$ y utilice la parte anterior para demostrar que:

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n+1} \leq n!, \quad \forall n \geq 1.$$

Indicación: $\int_1^n \ln(x)\, dx = n \ln n - (n+1)$.

Resumen

- Sea $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. El conjunto $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una partición del intervalo $[a,b]$ si $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Diremos que la norma de la partición P es:

$$|P| = \sup \Delta x_i$$

  Donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ con $i \in \{1, \ldots, n\}$ y denotaremos al conjunto de todas las particiones del $[a,b]$ como $P_{[a,b]}$. OJO: $(x_i - x_{i-1}) \leq |P|$.
- Sea $P \in P_{[a,b]}$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, se define la suma superior e inferior respectivamente como:

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

  Donde $M_i(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ y $m_i(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.
- Si $P, Q \in P_{[a,b]}$ y $P \subseteq Q$ tenemos que:

$$s(f,P) \leq s(f,Q) \leq S(f,Q) \leq S(f,P)$$

- Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, definimos su integral superior e inferior respectivamente como:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf_{P \in P_{[a,b]}} S(f,P), \quad \underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup_{P \in P_{[a,b]}} s(f,P)$$

  Diremos que una función es Riemann-integrable si su integral superior e inferior coinciden. En dicho caso definimos la integral como:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

Criterio de Riemann

- f es integrable si y solo si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists P \in P_{[a,b]}, S(f,P) - s(f,P) \leq \epsilon$$

- Dos particiones comunes son la equiespaciada:

$$x_i = x_0 + i\Delta x = a + i\frac{b-a}{n}$$

  y la geométrica:

$$x_i = aq^i = a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^i$$