Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA-1002 – Cálculo Diferencial e Integral

Auxiliar 6: Primitivas

Profesor: Juan José Maulen
Auxiliar: Iñaki Escobar Cano

P1. Usando el cambio trigonométrico, calcule las siguientes primitivas:

- $\int \frac{\cot(x)}{\sin(x)-1}\,dx$
- $\int \frac{1}{1+\sin(x)}\,dx$

P2. Usando fracciones parciales calcule las siguientes primitivas:

- $\int \frac{x}{(4x+1)(x+2)}\,dx$
- $\int \frac{x^2-x+6}{x^3+3x}\,dx$

P3. Utilizando integración por partes, calcule:

- $\int e^x \sin(x)\,dx$
- $\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx$
- $\int x\sin(x)\,dx$
- $\int \ln(x^2+a^2)\,dx$

P4. Definamos para $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}dx$$

Pruebe que:

$$(1+2n)I_n = 2x^n\sqrt{1+x} - 2nI_{n-1}$$

P5. Calcule la fórmula de recurrencia de:

- $\int \cos^n(x)\,dx$
- $\int x^n \sin(x)\,dx$

Resumen

Primitiva Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $\text{int}(I)$ (el interior de I), se llama primitiva de una función f sobre I si y sólo si

$$\forall x \in \text{int}(I),\ F'(x) = f(x)$$

Si F es una primitiva de f, entonces $F + c$ es otra primitiva de f para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

Es muy importante notar lo siguiente:

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$$

La derivada y la integral son procesos inversos, pero la integral bota una constante.

La integral es lineal:

$$\int (f \pm g) = \int f \pm \int g$$

$$\int (\lambda f) = \lambda \left(\int f\right)$$

Cambio de Variable Si $u = g(x)$, entonces

$$\int f(u)\,du = \int (f \circ g)(x) g'(x)\,dx$$

Integración por Partes Sean u y v dos funciones de x, entonces:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

o, equivalentemente

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

o, de manera compacta

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Sustituciones trigonométricas Se recomiendan los siguientes cambios de variables:

- Para $a^2 + x^2$, usar $x = a\tan(v)$ o $x = a\sinh(v)$
- Para $a^2 - x^2$, usar $x = a\sin(t)$ o $x = a\cos(t)$
- Para $x^2 - a^2$, usar $x = a\sec(v)$ o $x = a\cosh(v)$

Obs: Notar que da lo mismo si se escoge v o t.

Fracciones parciales: Si se tiene $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $\text{gr}(Q) > \text{gr}(P)$, se aconseja expresar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en suma de fracciones.

Sea $R(\cos(x), \sin(x))$ una fracción, donde tanto numerador como denominador solo contienen $\sin(x)$ y $\cos(x)$. Si se desea integrar, se aconseja el cambio de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.