P1. Considere la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(e^{\alpha x}-1)\cos(\pi x)}{\pi sin(x)} & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ \frac{\ln(1+2x)}{(\beta+1)x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- Determine los valores de α y β en $\mathbb{R}$ de modo tal que f sea continua en $x = 0$.
- Explique por qué f no es continua en $\mathbb{R}$ y explicite el conjunto donde es continua considerando los valores de α y β de la parte anterior.
- Usando los valores de α y β, demuestre que existe $x_0 \in [-1, 0]$ tal que $f(x_0) = 0$.

1: Para esto usamos que f es continua en 0 ssi $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

Es decir

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{(\overbrace{e^{\alpha x} - 1) \cos(\pi \cdot x)}^{\to 1}}{\pi \cdot \sin(x)} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{\alpha x} - 1}{\pi \cdot \sin(x)} = \frac{0}{0} \quad / \text{L'H}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} \frac{\alpha \cdot e^{\alpha x}}{\pi \cdot \cos(x)} = \frac{\alpha}{\pi}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\pi} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \pi$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+2x)}{(\beta+1)x} = \frac{0}{0} \quad \nearrow L'H$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{1+2x} \cdot 2}{\beta+1} = \frac{2}{\beta+1} = 1$$

$$\Rightarrow \beta = 1$$

2.- El problema de $f(x)$ está cuando $x<0$ pues se anula $\sin(x)$, por lo cual no será continua en $-n\cdot\pi$, con $n \in \mathbb{N}$

$\therefore$ f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{-n\pi\}$

$n \in \mathbb{N}$

3.- Para saber si $\exists$ la solución de una función se usa TVI

Ya sabemos que $f(0)=1$, así que falta ver si $f(-1) \leq 0$

Entonces nos queda $f(-1) = \dfrac{(e^{-\pi}-1)\cdot -1}{\pi \cdot \sin(-1)}$

Sabemos que $e^{x} < 1$ si $x < 0$

$\Rightarrow \quad e^{-\pi} - 1 < 0$

y los ceros del seno son $-\pi$ y 0

$\Rightarrow \quad \sin(x) < 0$ si $x \in (-\pi, 0)$

$\therefore \quad f(-1)$ es el producto de 3 números negativos, entonces $f(-1) \leq 0$

y como se tiene $f(-1) \cdot f(0) \leq 0$

$\Rightarrow \exists x_0 \mid f(x_0) = 0$ //

P2| Se tiene que $f(x) = e^x \cos(x) + x$

Sabemos que $e^x > 1 \quad \forall x > 0$

Entonces si tomamos los $\bar{x}$ tq $\cos(\bar{x}) = -1$
es decir, $\bar{x} = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{N}$

Tendríamos que $f(x) < 0$
y si tomamos los $\underline{x} = 2n\pi$ nos queda

$\cos(2n\pi) = 1 \wedge f(x) > 0$

$\therefore \exists \tilde{x} \in [2n\pi, (2n+1)\pi] \mid f(\tilde{x}) = 0$

y como los naturales son infinitos, existen infinitos $\tilde{x} \mid f(\tilde{x}) = 0$

P3) Si usamos TVM en $f(x)$ nos queda

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \quad , \quad c \in (0, x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(x)}{x} = f'(c)$$ pero como $f(x)$ es convexa $\Rightarrow f''(x) > 0$

$$\Rightarrow f'(c) < f'(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} < f'(x) \quad //$$

P41) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

- Sabemos que $x^3 \wedge x^2+1$ son continuos además $x^2+1 \neq 0$ $\therefore$ Por composición de continuos, $f(x)$ es continua.
  Como el denominador no se anula, $\nexists$ asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^2+1} \to \infty \quad \wedge \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2+1} \to -\infty$$

- Calculamos $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2}$$

Como nunca se indetermina, es derivable $\forall x$

Ahora la igualamos a 0

$$\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \iff x^2(x^2+3) = 0$$

$\Rightarrow x = 0$ es la única solución

- Tenemos que $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} \geq 0 \ \forall x$

Por lo cual es creciente en $\mathbb{R}$. Como es creciente en todo $\mathbb{R}$ no existe ninguna clase de máximo ni mínimo de ningún tipo.

- Calculamos $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^{\cancel{2}} - (x^4+3x^2)\cdot 2\cancel{(x^2+1)}\cdot 2x}{(x^2+1)^{\cancel{4}\,3}}$$

Como nunca se anula es derivable $\forall x$

$$= \frac{2x\left[(2x^3+3)(x^2+1) - (2x^4+6x^2)\right]}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$$

Ahora igualamos a 0

$$\frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3} = 0 \Rightarrow x=0,\ x=\sqrt{3},\ x=-\sqrt{3}$$

- Para estudiar su convexidad haremos una tabla con los puntos donde $f''(x)$ se anula.

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$\sqrt{3} - x$	$+$	$+$	$+$	$-$
$\sqrt{3} + x$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x^2+1)^3$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
	Convexa	Cóncava	Convexa	Cóncava

P5) Usamos la indicación

$$\frac{h(1)-h(0)}{1-0} = h'(c) \quad , \quad c \in (0,1)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x+\alpha d) - f(x) = \alpha d \cdot f'(x+\alpha \cdot d \cdot c)$$

Sumamos un 0 conveniente

$$\Leftrightarrow \quad f(x+\alpha d) - f(x) = \alpha d \cdot f'(x) + \alpha d \cdot f'(x+\alpha d c)$$
$$- \alpha d \cdot f'(x)$$

Pero $\alpha d \cdot [f'(x+\alpha d c) - f'(x)]$
usamos que es L- lipschitz

$$\Rightarrow |f'(x) - f'(y)| \leq L|x-y|$$

$$\Rightarrow f'(x+\alpha d \cdot c) - f'(x) \leq L(\cancel{x}+\alpha d c - \cancel{x}) \leq L \alpha d$$

$$\therefore \quad f(x+\alpha d) - f(x) \leq \alpha d f'(x) + (L \cdot \alpha d)\alpha d \cdot c$$

Pero $c < 1$

$$f(x+\alpha d) - f(x) \leq \alpha d f'(x) + L \alpha^2 d^2$$

//

P6. Dada una sucesión $(s_n) \to \ell \neq 0$, entonces la sucesión (u_n) dada por $u_n = (-1)^n s_n$ es convergente. Discuta la veracidad de dicha afirmación.

Para estos casos siempre es bueno tomar casos simples.

Ej: Sea $s_n = 1 + \frac{1}{n}$, la cual converge a 1

pero tenemos que $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot (-1)^n$

$$\Leftrightarrow u_n = \underbrace{(-1)^n}_{\text{no converge}} + \underbrace{\frac{1}{n} \cdot (-1)^n}_{\text{Converge}}$$

$\Rightarrow$ u_n no converge

$\therefore$ La afirmación es falsa.