P1. Sea $f(x) = \sin(x)$ y $P(x) = x - x^3 + x^5$, y sea $(x_n) \subset \mathbb{R}$ con $x_n \to 0$, entonces

$$\left|\frac{\sin(x_n) - P(x_n)}{(x_n)^6}\right| \to 0.$$

Discuta la veracidad de dicha afirmación.

notemos que $P(x)$ tiene una forma similar a la serie de Taylor de $\sin(x)$

Entonces usamos la fórmula de Taylor con $k = 5$ alrededor de $\bar{x} = 0$

$$\Rightarrow \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{-\sin(c)}{6!} \cdot x^6$$

con $c \in (0, x)$

Entonces nos queda que $\sin(x) - P(x)$

$$\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\sin(c)}{6!} \cdot x^6 - \cancel{x} + x^3 - x^5$$

$$(3! = 6 \quad \wedge \quad 5! = 120)$$

$$\frac{5}{6} x^3 - \frac{119}{120} x^5 - \frac{\sin(c)}{6!} \cdot x^6$$

y si lo dividimos por x^6 nos queda la expresión del enunciado y evaluamos en la sucesión

$$\Leftrightarrow \quad \left| \frac{\frac{5}{6} x_n^3 - \frac{119}{120} x_n^5 - \sin(c) \cdot (x_n)^6}{(x_n)^6} \right|$$

Pero notamos que el denominador tiene un orden mayor que x_n^3 y x_n^5 por lo cual nos quedaría una división por cero ∴ no converge

P2. A partir del desarrollo de Taylor en torno a 0 de $(x+a)^n$, con $n \geq 1$ un entero, demuestre la fórmula del binomio:

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} x^k.$$

Primero calculamos las derivadas de $(x+a)^n$

$$f'(x) = n(x+a)^{(n-1)}$$

$$f''(x) = n(n-1)(x+a)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot (x+a)^{(n-k)}$$

$$\therefore \quad T_k = a^n + n \cdot a^{n-1} x + \frac{n(n-1) \cdot a^{n-2} \cdot x^2}{2!} + \dots + \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{a^{n-k} \cdot x^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \cdot a^{n-k} \cdot x^k$$

//

P3. Determine el polinomio de Taylor de orden 2 (o grado 2, o $T_2(x)$) para la función

$$g(x) = \sqrt{1+x}$$

en torno a $\bar{x} = 0$ y demuestre que si $x > 0$, este polinomio aproxima a $g(x)$ con un error menor que $\frac{1}{16}|x|^3$.

Lo primero es calcular las derivadas de $g(x)$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}, \quad g''(x) = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}}$$

$$g'''(x) = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+x)^5}}$$

Entonces tenemos que $g(0) = 1$, $g'(0) = \frac{1}{2}$

$$g''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{4}\frac{x^2}{2!}$$

y el error sería $\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+c)^5}}\cdot\frac{1}{3!}\cdot x^3$, $c \in (0,x)$

Entonces tenemos que el error es

$$\left|\frac{\cancel{3}}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+c)^5}}\cdot\frac{1}{\cancel{3!}\,2!}\cdot x^3\right| = \frac{1}{16}\cdot\left|\frac{x^3}{\sqrt{(1+c)^5}}\right|$$

$$\leq \frac{1}{16}\left|x^3\right|$$ Concluyendo lo pedido.

P4. Calcule los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 0} x^{-2}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$.
2. $\lim_{x\to\infty} (e^{2x}+1)^{1/x}$.

1) $\lim_{x\to 0} x^{-2}\cdot \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$

sabemos que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 0$

Entonces nos queda $0/0$, así que usamos L'H

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\sin(x)}\cdot\frac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)}{x^2}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)}{2x^2\cdot\sin(x)} = \frac{0}{0}$$

Usamos L'H otra vez

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)\cdot\cancel{x} + \cancel{\cos(x)} - \cancel{\cos(x)}}{4\cancel{x}\cdot\sin(x) + 2x^{2}\cos(x)} \qquad \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x)}{4 \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x)} = \frac{0}{0} \quad / \text{L'H}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{-\cos(x)}{4 \cdot \cos(x) + 2\cos(x) - 2x \cdot \sin(x)} = \frac{-1}{6} \text{ "}$$

P4. Calcule los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 0} x^{-2} \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$.
2. $\lim_{x\to\infty} (e^{2x}+1)^{1/x}$.

2) $\lim_{x\to\infty} (e^{2x}+1)^{1/x}$

Nos queda de la forma ∞^0 entonces lo reescribimos de forma conveniente.

$$(e^{2x}+1)^{1/x} = e^{\ln(e^{2x}+1)\cdot\frac{1}{x}}$$

Entonces nos queda $e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^{2x}+1)}{x}}$

$= e^{\frac{\infty}{\infty}}$ Usamos L'H

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^{2x}+1)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{e^{2x}+1}\cdot e^{2x}\cdot 2}{1}$$

$$= 2\cdot\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$$

$$= 2_{//}$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} (e^{2x}+1)^{1/x} = e^2$$