**P1.** Demostrar que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|.$$

Usando el TVM para el cos(x) nos queda

$$\frac{\cos(x) - \cos(y)}{x - y} = -\sin(\alpha) \qquad \alpha \in (x, y)$$

$$/ \, |\,|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\cos(x) - \cos(y)}{x - y} \right| = |\sin(\alpha)| \quad / \text{ usamos que } \sin(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{|\cos(x) - \cos(y)|}{|x - y|} \leq 1 \qquad / \, |x - y|$$

$$\Leftrightarrow |\cos(x) - \cos(y) \leq |x - y| \,//$$

**P2.** Sea $f:[a,b]\to(0,\infty)$ dos veces derivable. Demuestre que si $\ln(f(x))$ es una función convexa, entonces $f$ es convexa.

Queremos llegar a que $f''(x) > 0$

Sabemos que $g(x) = \ln(f(x))$ es convexa

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\Rightarrow g''(x) = \frac{f''(x)\cdot f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2}$$

Como $g(x)$ es convexa $\Leftrightarrow g''(x) > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{f''(x)\cdot f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} > 0 \quad / \cdot [f(x)]^2$$

$$\Leftrightarrow f''(x)\cdot f(x) - [f'(x)]^2 > 0 \quad / + [f'(x)]^2$$

$$\Leftrightarrow f''(x)\cdot f(x) > [f'(x)]^2 \geq 0$$

Porque todo real al cuadrado $\geq 0$

$$\Leftrightarrow f''(x)\cdot f(x) > 0$$

y sabemos que $f(x) > 0$

$\Rightarrow f''(x) > 0$. Es decir que $f(x)$ es convexa.

**P3.** Considere las parábolas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \frac{x^2}{6} - 2 \quad \text{y} \quad g(x) = 4 - \frac{x^2}{3}.$$

Estas dos curvas tienen dos intersecciones, en puntos que denotamos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, con $a > 0$.

1. Encuentre explícitamente el valor de $a$.

2. Para cada $x \in (0, a)$, calcule el área $A(x)$ del rectángulo inscrito entre las dos parábolas, con lados paralelos a los ejes coordenados, y de lado horizontal de largo $2x$.

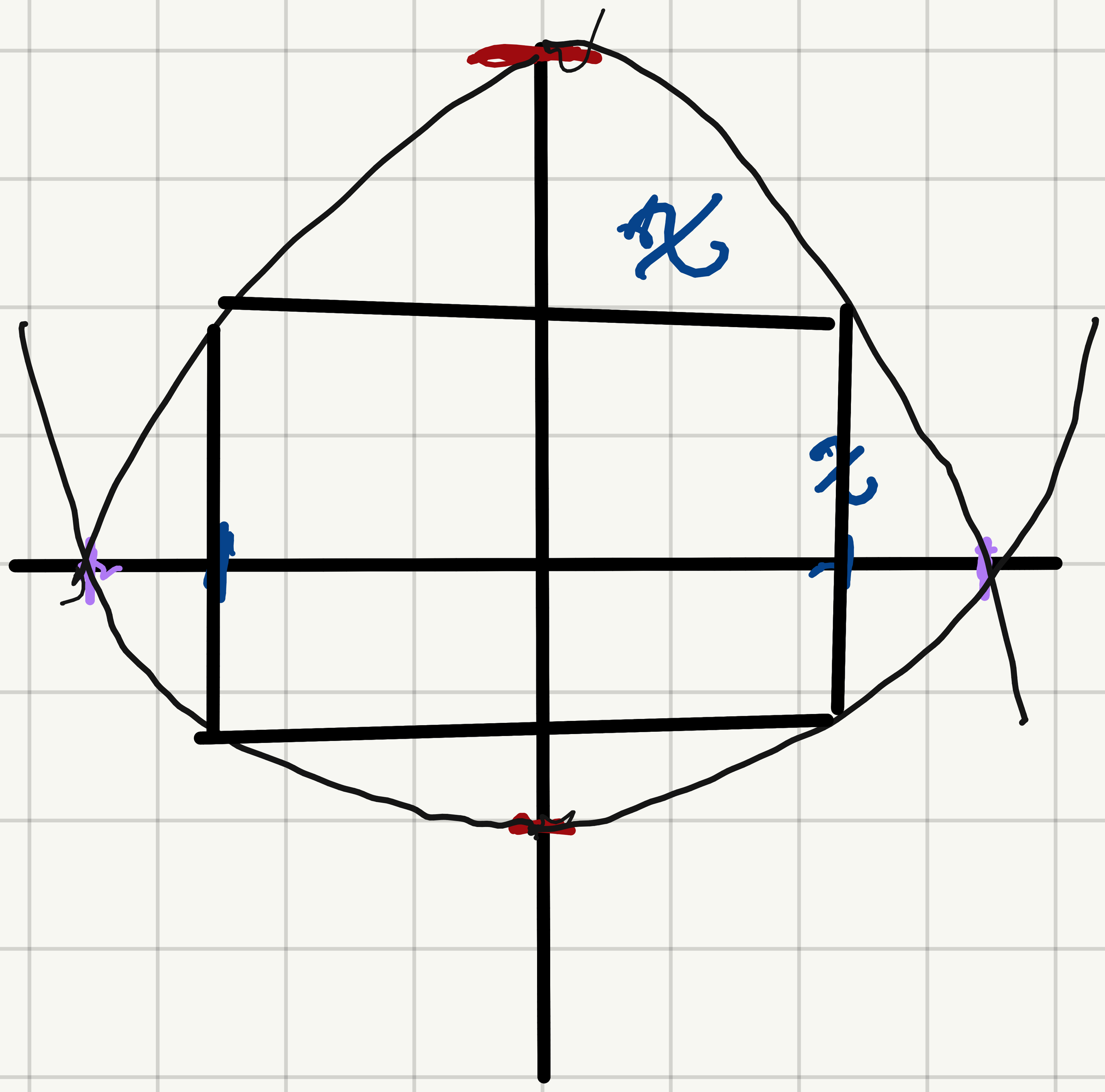
3. Muestre que la función $A : (0, a) \to \mathbb{R}$ tiene un máximo global en algún punto $\bar{x} \in (0, a)$. Encuentre también el valor de $A(\bar{x})$, es decir, el área máxima de un rectángulo inscrito entre las parábolas, con lados paralelos a los ejes coordenados.

1.- Usamos que $f(a) = g(a) = 0$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{6} - 2 = 0 \iff \frac{a^2}{6} = 2 \iff a^2 = 12$$

$$\Rightarrow a = \pm\sqrt{12}$$

2.- Gráficamente se vería así (más o menos)




Sabemos que el largo es de $2x$ y su altura es $-f(x) + g(x) = -\frac{x^2}{6} + 2 + 4 - \frac{x^2}{3} = 6 - \frac{x^2}{2}$

$\therefore A(x) = 2x\left(6 - \frac{x^2}{2}\right)$

$= 12x - x^3$

3.- Calculamos $A'(x)$ y $A''(x)$

$A'(x) = 12 - 3x^2$

$A''(x) = -6x < 0 \quad \forall x \in (0, a)$

$\therefore$ La función es cóncava $\forall x$

es decir que tiene un máximo global.

y su máximo será cuando $A'(\bar{x}) = 0$

$\Leftrightarrow A'(\bar{x}) = 12 - 3\bar{x}^2 = 0 \quad / + 3\bar{x}^2$

$\Leftrightarrow 12 = 3\bar{x}^2 \quad /$

$\Rightarrow \bar{x} = 2$

Con lo cual nos queda $A(2) = 12 \cdot 2 - 2^3$

$= 16$

**P5.** Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sea $f : [a,b] \to (0,+\infty)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$. Demuestre que existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left(\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)\right).$$

**Indicación:** Analice la función $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \ln(f(x))$.

Se ve que tiene $f(x)$ evaluado en los límites de su dominio por lo que tiene pinta de tener que usar TVM

$$\Rightarrow \quad \frac{h(b)-h(a)}{b-a} = h'(c), \; c \in (a,b)$$

$$h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\ln(f(b)) - \ln(f(a))}{b-a} = \frac{f'(c)}{f(c)} \quad / \cdot (b-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(f(b)/f(a)) = \frac{f'(c)}{f(c)} \cdot (b-a) \quad / e^{()}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(b)/f(a) = \exp\left[\frac{f'(c)}{f(c)} \cdot (b-a)\right]$$

P41 Tenemos $f(x) = 1 + x \cdot e^{1/x}$

1.- Podemos notar que no es continua en $x=0$, pues se indetermina $1/x$. ¿Es reparable?

$$\lim_{x \to 0} 1 + x \cdot e^{1/x} = 1 + 0 \cdot \infty$$ lo reescribimos de forma conveniente

$$\Leftrightarrow 1 + \lim_{x \to 0} \frac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}}$$ C.V $\frac{1}{x} = u$

$\Rightarrow x \to 0, u \to \infty$

$$\Leftrightarrow 1 + \lim_{u \to \infty} \frac{e^{u}}{u} = \frac{\infty}{\infty} \quad / L'H$$

$$\Leftrightarrow 1 + \lim_{u \to \infty} \frac{e^{u}}{1} = \infty$$ $\therefore$ no es reparable.

2.- ya vimos que $\nexists$ asíntotas verticales.

veamos si hay horizontales

$$\lim_{x \to \infty} 1 + x \cdot e^{1/x} = 1 + \infty \cdot 1 \to \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} 1 + x \cdot e^{1/x} = 1 + -\infty \cdot 1 \to -\infty$$

~~⇒ la asín~~

$\therefore$ no existen asíntotas horizontales.

¿y oblicuas? Para es necesitamos que $\lim_{x\to\infty} f'(x) = m \wedge n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx$

calculamos $f'(x) = e^{1/x} + x \cdot e^{1/x} \cdot -\frac{1}{x^2}$

$$= e^{1/x} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{1/x} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} 1 + x \cdot e^{1/x} - x = 1 + \lim_{x\to\infty} x\left(e^{1/x} - 1\right)$$

$$= 1 + \infty \cdot 0$$

lo reescribimos para que se vea como $0/0$

$$n = 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} = 2$$

notemos que el resultado es el mismo para $x \to -\infty$

$\therefore$ la asíntota es $x + 2$

3.- Ya calculamos que $f'(x)$ es

$$f'(x) = e^{1/x} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

sabemos que $e^{1/x} > 0 \ \forall x$ y $\left(1-\frac{1}{x}\right) > 0$

$\forall x \in (1, \infty) \wedge (-\infty, 0)$

$\therefore$ Es creciente en $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ y decreciente en $(0, 1)$,,
Como $\nexists$ asíntotas oblicuas, no hay mínimos ni máximos.

4.- Como nos piden encontrar una solución, usamos el TVI.

$f(-1) = 1 - e^{-1} > 0$ pues $e^{x} < 1 \ \forall x < 0$
$f(-2) = 1 - 2 \cdot e^{-1/2} < 0$ ya que $1 = \frac{2}{\sqrt{4}} < \frac{2}{\sqrt{e}}$

$\therefore$ Como $f(-1) \cdot f(-2) \leq 0 \Rightarrow \exists\, \bar{x} \in [-2, -1] \mid f(\bar{x}) = 0$,,

Primero, notamos que $f(x) > 0 \ \forall x > 0$
$\therefore \nexists\, \bar{x} \in (0, \infty) \mid f(\bar{x}) = 0$

y como $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$

$\Rightarrow \quad f(\bar{x}) < f(x) \; , \; x \in (\bar{x}, 0)$

$\therefore \; \bar{x}$ es el único cero.

5.- Tenemos $f'(x) = e^{1/x}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$

$$\Rightarrow f''(x) = e^{1/x} \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) + e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{e^{1/x}}{x^2} \cdot \left(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{e^{1/x}}{x^2}}_{>0 \; \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \cdot \frac{1}{x}$$

$\Rightarrow \; f''(x) > 0 \;\; \forall x > 0 \;\; \wedge \;\; f''(x) < 0 \;\; \forall x < 0$

y no está definido en $x = 0$

19:28 jue, 2 de ene 94%

Gráfica sin título Guardar Iniciar Sesión Registrarse

1

$$1 + x \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

2


impulsado por desmos

**P6.** Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en todo su dominio. Suponga que $g(0) = f(0)$ y que $g'(x) \geq f'(x)$ para todo $x \geq 0$. Muestre que $g(x) \geq f(x)$ para todo $x \geq 0$.

Para esto definimos $h(x) = g(x) - f(x)$

$\Rightarrow h(0) = g(0) - f(0) = 0$

$\wedge \; h'(x) = g'(x) - f'(x)$

pero tenemos que $g'(x) \geq f'(x) \; \forall x$

$\Leftrightarrow \; g'(x) - f'(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow \; h'(x) \geq 0$

Entonces, juntando ambas propiedades de $h(x)$ nos queda

$h(x) \geq h(0)$

$\Leftrightarrow \; h(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow \; g(x) - f(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow \; g(x) \geq f(x)$ //