

Auxiliar extra C1

Profesor: Juan José Maulen

Auxiliar: Iñaki Escobar Cano

P1. Considere la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(e^{\alpha x} - 1) \cos(\pi x)}{\pi \sin(x)} & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ \frac{\ln(1+2x)}{(\beta+1)x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- Determine los valores de α y β en $\mathbb{R}$ de modo tal que f sea continua en $x = 0$.
- Explique por qué f no es continua en $\mathbb{R}$ y explicita el conjunto donde es continua considerando los valores de α y β de la parte anterior.
- Usando los valores de α y β , demuestre que existe $x_0 \in [-1, 0]$ tal que $f(x_0) = 0$.

P2. Demuestre que la función $f(x) = e^x \cos(x) + 1$ tiene infinitas raíces reales positivas.

P3. Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, continua en $[0, \infty)$ y derivable en $(0, \infty)$, y convexa en su dominio, con $f(0) = 0$. Demuestre que

$$f'(x) > \frac{f(x)}{x} \quad \forall x \in (0, \infty).$$

P4. Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}.$$

1. Estudie la continuidad de f y calcule los límites de f hacia $\pm\infty$. ¿Tiene f asíntotas verticales?
2. Estudie la derivabilidad de f , calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.
3. Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos y máximos, locales y globales, de f .
4. Determine dónde f es dos veces derivable, calcule f'' allí, y calcule todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f''(\bar{x}) = 0$.

5. Determine los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava (si los hay).

P5. Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Suponga además que f' es L -Lipschitz, es decir, se cumple que:

$$|f'(x) - f'(y)| \leq L|x - y|.$$

Demuestre que para todo $\alpha \geq 0$ y $d \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$f(x + \alpha d) - f(x) \leq \alpha f'(x)d + \alpha^2 Ld^2.$$

Hint: Considere la función $h(s) = f(x + s\alpha d)$, $s \in [0, 1]$, y utilice el Teorema del Valor Medio.

P6. Dada una sucesión $(s_n) \rightarrow \ell \neq 0$, entonces la sucesión (u_n) dada por $u_n = (-1)^n s_n$ es convergente. Discuta la veracidad de dicha afirmación.