Auxiliar 5: Derivadas de orden superior

Profesor: Juan José Maulen
Auxiliar: Iñaki Escobar Cano

P1. Sea $f(x) = \sin(x)$ y $P(x) = x - x^3 + x^5$, y sea $(x_n) \subset \mathbb{R}$ con $x_n \to 0$, entonces

$$\left| \frac{\sin(x_n) - P(x_n)}{(x_n)^6} \right| \to 0.$$

Discuta la veracidad de dicha afirmación.

P2. A partir del desarrollo de Taylor en torno a 0 de $(x+a)^n$, con $n \geq 1$ un entero, demuestre la fórmula del binomio:

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} x^k.$$

P3. Determine el polinomio de Taylor de orden 2 (o grado 2, o $T_2(x)$) para la función

$$g(x) = \sqrt{1+x}$$

en torno a $\bar{x} = 0$ y demuestre que si $x > 0$, este polinomio aproxima a $g(x)$ con un error menor que $\frac{1}{16}|x|^3$.

P4. Calcule los siguientes límites:

1. $\lim_{x \to 0} x^{-2} \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$.
2. $\lim_{x \to \infty} (e^{2x} + 1)^{1/x}$.
3. Propuesto: $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\tanh(x)} - \frac{1}{\tan(x)}\right)$.
4. Propuesto: $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{\sin(x)} - (\sin(x))^x}{x^{\sinh(x)} - (\sinh(x))^x}$.

Resumen

L'Hopital Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivables en (a, b), tales que:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = L,$$

con $L = 0$ o $L = \infty$ y $g(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

siempre que este último límite exista (y bajo ciertas condiciones adicionales dependiendo del tipo de límite que se esté calculando).

Serie de Taylor Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, k-veces derivable en $\bar{x} \in (a, b)$ y sea:

$$T_k f(h) := f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{f''(\bar{x})}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!}h^k$$

su desarrollo de Taylor de orden k en torno a $\bar{x}$. Entonces:

$$f(x) = T_k f(x - \bar{x}) + o((x - \bar{x})^k),$$

con

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h^k)}{h^k} = 0.$$

Fórmula de Taylor Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $(k + 1)$ veces derivable en todo punto del intervalo (a, b). Sea $T_k f(\cdot)$ el polinomio de Taylor de orden k en $\bar{x} \in (a, b)$. Entonces, para todo $x > \bar{x}$ (resp. $x < \bar{x}$) existe $\xi \in (\bar{x}, x)$ (resp. $\xi \in (x, \bar{x})$) tal que:

$$f(x) = T_k f(x - \bar{x}) + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k + 1)!}(x - \bar{x})^{k+1}.$$