Auxiliar 4: Teoremas de derivadas

Profesor: Juan José Maulen
Auxiliar: Iñaki Escobar Cano

P1. Demostrar que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|.$$

P2. Sea $f : [a, b] \to (0, \infty)$ dos veces derivable. Demuestre que si $\ln(f(x))$ es una función convexa, entonces f es convexa.

P3. Considere las parábolas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \frac{x^2}{6} - 2 \quad \text{y} \quad g(x) = 4 - \frac{x^2}{3}.$$

Estas dos curvas tienen dos intersecciones, en puntos que denotamos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, con $a > 0$.

1. Encuentre explícitamente el valor de a.
2. Para cada $x \in (0, a)$, calcule el área $A(x)$ del rectángulo inscrito entre las dos parábolas, con lados paralelos a los ejes coordenados, y de lado horizontal de largo $2x$.
3. Muestre que la función $A : (0, a) \to \mathbb{R}$ tiene un máximo global en algún punto $\bar{x} \in (0, a)$. Encuentre también el valor de $A(\bar{x})$, es decir, el área máxima de un rectángulo inscrito entre las parábolas, con lados paralelos a los ejes coordenados.

P4. Estudie completamente la función $f(x) = 1 + xe^{\frac{1}{x}}$. Se pide:

1. Determinar el dominio, la continuidad y estudiar, si existen, puntos de discontinuidad reparable.
2. Encontrar asíntotas horizontales, verticales y oblicuas, si las hay.
3. Calcular $f'(x)$ y determinar los intervalos de crecimiento, máximos y mínimos.
4. Demostrar que el único cero de f en su dominio se encuentra en $[-2, -1]$.
5. Calcular $f''(x)$ y determinar las convexidades y puntos de inflexión, si los hay.
6. Bosquejar el gráfico de f e indicar el recorrido de f.

P5. Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sea $f : [a, b] \to (0, +\infty)$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Demuestre que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left(\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)\right).$$

Indicación: Analice la función $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \ln(f(x))$.

P6. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en todo su dominio. Suponga que $g(0) = f(0)$ y que $g'(x) \geq f'(x)$ para todo $x \geq 0$. Muestre que $g(x) \geq f(x)$ para todo $x \geq 0$.

Resumen

Regla de Fermat
Si $\bar{x} \in (a, b)$ es mínimo local o máximo local de una función derivable $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, entonces $f'(\bar{x}) = 0$.

Teorema del Valor Medio (TVM)
Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), con $g(b) \neq g(a)$ y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces, existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

En particular, si $g(x) = x$ se tiene

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Teorema
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f'(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0) para todo $x \in (a, b)$, entonces f es creciente (resp. decreciente) en $[a, b]$. Si la desigualdad es estricta, la monotonía es igualmente estricta.

Convexidad
Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice convexa si las rectas secantes al gráfico de la función quedan por encima del gráfico, es decir:

$$f(y) \leq f(x) + \frac{f(z) - f(x)}{z - x}(y - x), \quad \forall x < y < z.$$

Teorema
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces f es convexa en $[a, b]$ ssi f' es creciente en (a, b).

Caracterización de puntos críticos
Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, dos veces derivable en $\bar{x} \in (a, b)$, con $f'(\bar{x}) = 0$, entonces hay 3 casos posibles:

1. Si $f''(\bar{x}) > 0$, $\bar{x}$ es un mínimo local.
2. Si $f''(\bar{x}) < 0$, $\bar{x}$ es un máximo local.
3. Si $f''(\bar{x}) = 0$, $\bar{x}$ es un punto de inflexión.