

P1. Considere la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2}{x+a} & \text{si } x < a \\ 2x - e^{x-a} & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Estudie la derivabilidad de f para los distintos valores de a .

Lo primero que necesitamos ver es si es continua en $x = a$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{2x^2}{x+a} = \frac{2a^2}{2a} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} 2x - e^{x-a} = 2a - 1$$

$$\Rightarrow \text{Es continua si } a = 2a - 1$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

¿Es diferenciable? Para eso debemos evaluar si $\exists f'(a)$, pues es directo notar que es diferenciable para $x > a$ y $x < a$.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2(\cancel{1} + h) - e^{(1+h-1)} - 2 \cdot 1 + e^{1-1}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h + 1 - e^h}{h}$$

$$= 2 - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^h - 1}{h} \quad \text{---> 1, limite conhecido}$$

$$= 1 \quad \text{,, agora nos falta. } h \rightarrow 0^-$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{2(1+h)^2}{2+h} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2(1+h)^2 - 2 - h}{h(2+h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2(1+2h+h^2) - 2 - h}{h(2+h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{2} + 4\cancel{h} + 2h^{\cancel{2}} - \cancel{2} - \cancel{h}}{\cancel{h}(2+h)}$$

$$= \frac{3}{2}$$

,, logo $f \neq \frac{3}{2}$
no qual em a

P2. Demuestre que

$$2f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h)}{h}$$

Recordando que $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

hacemos un ~~ni quita~~ ni pone y nos queda

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \left[\frac{f(x-h) - f(x)}{h} \right]$$

$$\Leftrightarrow f'(x) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h}$$

usamos un c.v $u = -h$

$$\Rightarrow f'(x) - \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x+u) - f(x)}{-u}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) + f'(x)$$

$$\Leftrightarrow 2f'(x)$$

P3. Considere las funciones $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ derivables y que satisfacen:

- $\forall x \in \mathbf{R} \quad g(x) = xf(x) + 1$ (1)
- $\forall x, y \in \mathbf{R} \quad g(x+y) = g(x)g(y)$ (2)
- $f(0) = 1$ (3)

Muestre que $\forall x \in \mathbf{R} \quad g'(x) = g(x)$. Muestre además que para todo $n \in \mathbf{N}$

$$g(x) = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$$

donde $f^{(n)}(x)$ es la derivada de f iterada n veces.

Como primer paso derivamos $g(x)$

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad / \text{ usamos (2)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot g(h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \left[\frac{g(h) - 1}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \left[\frac{\cancel{h} \cdot \cancel{g}(h) + \cancel{1} - \cancel{1}}{\cancel{h}} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \cancel{g}(h) \quad / \text{ usamos que } \cancel{g} \text{ es continua}$$

$$= g(x) \cdot \cancel{g}(0)$$

$$= g(x) //$$

P3)

Como ya demostramos que $g'(x) = g(x)$, si volvemos a derivarlos nos queda

$$g''(x) = g'(x) \Leftrightarrow g''(x) = g(x)$$

Si iteramos n veces nos queda

$$g^{(n)}(x) = g(x)$$

Para demostrar que $g(x) = x f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x)$ usamos inducción

$$C.B \quad n=1 \quad g(x) = x f'(x) + f(x)$$

$$\text{tenemos que } g'(x) = f(x) + x f'(x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = g(x) = x f'(x) + f(x)$$

$$H.I : \quad g(x) = x f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x)$$

$$P.I : \quad g(x) = x f^{(n+1)}(x) + (n+1) f^{(n)}(x)$$

Per la H.I. teniamo che

$$g(x) = x \cdot f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x) \quad (1)$$

$$g'(x) = f^{(n)}(x) + x \cdot f^{(n+1)}(x) + n \cdot f^{(n)}(x)$$

$$g'(x) = g(x) = x \cdot f^{(n+1)}(x) + (n+1) \cdot f^{(n)}(x) \quad //$$

P4 | necesitamos calcular el máximo de utilidades, lo cual sería nuestro ingreso menos el costo.

$$\text{Ingreso: } P(q) \cdot q = 300q - 0,02q^2$$

$$\text{Costo: } 30q + 9000$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow u(q) &= 300q - 0,02q^2 - [30q + 9000] \\ &= 270q - 0,02q^2 - 9000\end{aligned}$$

Para obtener un máximo necesitamos buscar que $u'(q^*) = 0 \wedge u''(q^*) < 0$

$$u'(q) = 270 - 0,04q \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{270}{0,04} = q \quad \Leftrightarrow q = 6750$$

$$\wedge u''(q) = -0,04 < 0$$

$\therefore$ El óptimo se tiene en $q = 6750$.