P1. Demuestre que la siguiente función tiene al menos una raíz en $\mathbb{R}$

$$f(x) = x^{15} + 7x^3 - 5$$

Para demostrar que $\exists$ una solución usamos el TVI.

Tomamos $x = 0 \wedge x = 1$ por simplicidad

$f(0) = -5 \quad \wedge \quad f(1) = 1 + 7 - 5 = 3$

Con esto podemos notar que se cumple que

$f(0) \cdot f(1) \leq -15 \leq 0$

$\Rightarrow \quad \exists \, \bar{x} \mid f(\bar{x}) = 0$, con esto demostrando que existe una raíz para esta función.

P2. Considere la familia de polinomios $g_n(x) = x^n + x - 1$.

a) Probar que $\forall n \geq 1$, $g_n(x)$ tiene una raíz r_n positiva.

b) Demuestre que la sucesión de raíces $(r_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión convergente.

a) usamos $x = 0 \wedge x = 1$ igual que antes

$g(0) = -1 \wedge g(1) = 1 + 1 - 1 = 1$

con esto se tiene que $g(0) \cdot g(1) \leq -1 \leq 0$

$\therefore \exists \bar{x} \in [0, 1] \mid g(\bar{x}) = 1$

pero sabemos que $f(0) \neq f(1) \neq 0$

$\therefore$ El conjunto se reduce a $\bar{x} \in (0, 1)$ //

b) Como $\forall n$ se tendrá que $g_n(0) = -1$ $\wedge$ $g_n(1) = 1$ se tiene que $(r_n)_n$ está acotada por $[0, 1]$ y por B-W sabemos que toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.

P3. El objetivo de este problema es probar que toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y tal que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq |x|$, alcanza su mínimo en $\mathbb{R}$, es decir,

$$\exists \overline{x} \in \mathbb{R} \text{ tal que } \forall x \in \mathbb{R},\ f(\overline{x}) \leq f(x).$$

Para ello, considere $\alpha = f(0)$ y el intervalo $I = [-\alpha, \alpha]$.

I) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus I$, $f(x) > \alpha$.

II) Concluya que el mínimo de f que se está buscando ocurre en un punto de I.

I) Si trabajamos en $\mathbb{R} \setminus I$ estamos trabajando

en los valores tales que $x > \alpha \vee x < -\alpha$

o lo que es igual a $x > \alpha \vee -x > \alpha$

que es equivalente a $|x| > \alpha$

pero además sabemos que $f(x) \geq |x|$

que por transitividad nos da $f(x) > \alpha$ //

P3) II) Sabemos que I es cerrado y acotado $\Rightarrow$ por teorema de Weierstrass $f(x)$ tiene un mínimo y máximo en I

Es decir que $\exists\, \underline{x}, \bar{x} \in I \mid f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\bar{x})$

Pero tomemos $x = 0$

$\Rightarrow f(\underline{x}) \leq \alpha \leq f(\bar{x})$ pero $\alpha < f(x)\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus I$

$\Rightarrow f(\underline{x}) < f(x)\ \forall x$

$\therefore$ f alcanza su mínimo en $\underline{x} \in I$ //

P4. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

- $e^{\sqrt{tan(x)}}$
- $\frac{x^{sin(3x)}}{ln(x^5)}$
- $cos(e^{6x})\sqrt[3]{ln(x)}$
- $\frac{\sin(x^2)\cdot e^{x^3}+\ln(x^2+1)}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

- $e^{\sqrt{\tan(x)}}$

Su derivada será:

$$e^{\sqrt{\tan(x)}} \cdot \left[\sqrt{\tan(x)}\right]'$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\sqrt{\tan(x)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\tan(x)}} \cdot \left[\tan(x)\right]'$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{e^{\sqrt{\tan(x)}}}{2\cdot\sqrt{\tan(x)}} \cdot \sec^2(x) \quad //$$

- $\dfrac{x^{\sin(3x)}}{\ln(x^5)}$ usamos que $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

también usaré que $x^{\sin(3x)} = e^{\ln(x)\cdot\sin(3x)}$

$$\Rightarrow \left[e^{\ln(x)\sin(3x)}\right]' = e^{\ln(x)\sin(3x)} \cdot \left[\ln(x)\cdot\sin(3x)\right]'$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(x)\cdot\sin(3x)} \cdot \left[\left[\ln(x)\right]'\cdot\sin(3x) + \ln(x)\left[\sin(3x)\right]'\right]$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(x)\cdot\sin(3x)} \cdot \left[\frac{1}{x}\cdot\sin(3x) + \ln(x)\cdot\cos(3x)\cdot\left[3x\right]'\right]$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(x)\cdot\sin(3x)} \left[\frac{\sin(3x)}{x} + 3\ln(x)\cdot\cos(3x)\right]$$

$$\wedge \quad \left[\ln(x^5)\right]' = \left[5\ln(x)\right]' = \frac{5}{x}$$

∴ nos queda así la derivada

$$\left\{e^{\ln(x)\cdot\sin(3x)}\left[\frac{\sin(3x)}{x} + 3\ln(x)\cdot\cos(3x)\right]\cdot 5\ln(x) - e^{\ln(x)\cdot\sin(3x)}\cdot\frac{5}{x}\right\} \Big/ \left[5\ln(x)\right]^2 \;//$$

- $\cos(e^{6x}) \cdot \sqrt[3]{\ln(x)}$ usamos $[f(x) \cdot g(x)]'$

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$[\cos(e^{6x})]' = -\sin(e^{6x}) \cdot [e^{6x}]'$$
$$= -\sin(e^{6x}) \cdot e^{6x} \cdot [6x]'$$
$$= -\sin(e^{6x}) \cdot e^{6x} \cdot 6$$

$$[\sqrt[3]{\ln(x)}] = \frac{1}{3\sqrt[3]{\ln(x)^2}} \cdot [\ln(x)]'$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\ln(x)^2}} \cdot \frac{1}{x}$$

$\therefore$ la derivada nos queda

$$-\sin(e^{6x}) \cdot e^{6x} \cdot 6 \cdot \sqrt[3]{\ln(x)} + \cos(e^{6x}) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\ln(x)^2}} \cdot \frac{1}{x}$$ //

- $\dfrac{\sin(x^2)\cdot\ln(x) + \ln(x^2+1)}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

Aquí debemos mezclar ambas propiedades.

$$[\sin(x^2)\cdot\ln(x)]' = [\sin(x^2)]'\cdot\ln(x) + \sin(x^2)\cdot[\ln(x)]'$$

$$= \cos(x^2)\,[x^2]'\,\ln(x) + \sin(x^2)\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \cos(x^2)\cdot 2x\cdot\ln(x) + \frac{\sin(x^2)}{x}$$

$$[\ln(x^2+1)]' = \frac{1}{x^2+1}\cdot[x^2+1]'$$

$$= \frac{2x}{x^2+1}$$

$$[\sqrt{x^2+4x+5}]' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}}\cdot[x^2+4x+5]'$$

$$= \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+5}}$$

Ahora juntamos todas estas partes.

$$\left\{\left[\cos(x^2)\,[x^2]'\ln(x)+\sin(x^2)\cdot\frac{1}{x}\right]\cdot\sqrt{x^2+4x+5}\right.$$

$$\left.-\sin(x^2)\ln(x)\cdot\frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+5}}\right\}\Big/(x^2+4x+5)$$

$$+\frac{\left[\frac{2x}{x^2+1}\right]\sqrt{x^2+4x+5}-\ln(x^2+1)\frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+5}}}{x^2+4x+5}$$

//