Auxiliar 2: Continuidad. Los grandes teoremas

Profesor: Juan José Maulen
Auxiliar: Iñaki Escobar Cano

P1. Demuestre que la siguiente función tiene al menos una raíz en $\mathbb{R}$

$$f(x) = x^{15} + 7x^3 - 5$$

P2. Considere la familia de polinomios $g_n(x) = x^n + x - 1$.

a) Probar que $\forall n \geq 1$, $g_n(x)$ tiene una raíz r_n positiva.

b) Demuestre que la sucesión de raíces $(r_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión convergente.

P3. El objetivo de este problema es probar que toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y tal que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq |x|$, alcanza su mínimo en $\mathbb{R}$, es decir,

$$\exists \overline{x} \in \mathbb{R} \text{ tal que } \forall x \in \mathbb{R},\ f(\overline{x}) \leq f(x).$$

Para ello, considere $\alpha = f(0)$ y el intervalo $I = [-\alpha, \alpha]$.

I) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus I$, $f(x) > \alpha$.

II) Concluya que el mínimo de f que se está buscando ocurre en un punto de I.

P4. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

- $e^{\sqrt{tan(x)}}$
- $\frac{x^{sin(3x)}}{ln(x^5)}$
- $cos(e^{6x})\sqrt[3]{ln(x)}$
- $\frac{\sin\left(x^2\right)\cdot e^{x^3}+\ln\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

Resumen

TVI: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces, existe un $\overline{x} \in [a,b]$ tal que $f(\overline{x}) = 0$.

Weierstrass: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a,b]$.

Continuidad de funciones inversas: Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y estrictamente monótona con I un intervalo. Entonces, $J = f(I)$ es un intervalo, y la inversa $f^{-1} : J \to I$ es continua.

Continuidad uniforme: La función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que:

$$\forall x, y \in A,\ |x-y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A cerrado y acotado. Entonces, f es uniformemente continua si y solo si es continua en todo punto $\overline{x} \in A$.