P1. Sea la sucesión y_n definida por: $y_n = (\frac{2n-1}{n})^{\exp(1/n)}$. Estudie la convergencia de y_n.

Veamos que ocurre cuando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{n}\right)^{e^{1/n}}$$ / usamos que $x = e^{\ln(x)}$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left[e^{\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right)}\right]^{e^{1/n}}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right)\cdot e^{1/n}}$$ / Por continuidad

$$\Leftrightarrow e^{\lim_{n\to\infty} \underbrace{\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right)}_{\to \ln(2)} \cdot \underbrace{e^{1/n}}_{\to 1}}$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(2)\cdot 1} = 2_{//}$$

P2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en a y $\lim_{x\to b} g(x) = a$, entonces demuestre que $\lim_{x\to b} f(g(x)) = f(a)$.

Usaremos caracterización $\varepsilon - \delta$

como f es continua en a se tiene $\forall \varepsilon, \exists \delta \mid$

$|y - a| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(a)| < \varepsilon$

Si se tiene que $\lim_{x\to b} g(x) = a$ es lo mismo

que decir $\forall \tilde{\varepsilon}, \exists \tilde{\delta} \mid |x-b| < \tilde{\delta} \Rightarrow |g(x) - a| < \tilde{\varepsilon}$

$\Rightarrow$ Si tomamos $y = g(x) \wedge \delta = \tilde{\varepsilon}$

se tiene $|g(x) - a| < \tilde{\varepsilon} \Rightarrow |f(g(x)) - f(a)| < \varepsilon$

con lo cual se cumple la caracterización

$\varepsilon - \delta$

P3. Sea la función $h(x)$ definida por: $h(x) = \sqrt{3x+6}$, en $[1, \infty)$.
Estudie la continuidad de $h(x)$ en $[1, \infty)$ a través de la caracterización $\varepsilon - \delta$.

Necesitamos que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid$

$$|x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$$

En este caso quedaría

$$|x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow \underbrace{\left|\sqrt{3x+6} - \sqrt{3\bar{x}+6}\right|}_{\text{trabajamos esta expresión}} < \varepsilon$$

$$\left|\left(\sqrt{3x+6} - \sqrt{3\bar{x}+6}\right) \frac{\left(\sqrt{3x+6} + \sqrt{3\bar{x}+6}\right)}{\sqrt{3x+6} + \sqrt{3x+6}}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{3x+6-3\bar{x}-6}{\sqrt{3x+6} + \sqrt{3\bar{x}+6}}\right| = \frac{3|x-\bar{x}|}{\sqrt{3x+6} + \sqrt{3\bar{x}+6}}$$

Pero notemos que $\dfrac{1}{\sqrt{3x+6} + \sqrt{3\bar{x}+6}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{9}}$

$$\leq \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{3|x-\bar{x}|}{\sqrt{3x+6} + \sqrt{3\bar{x}+6}} \leq \frac{3|x-\bar{x}|}{6} = \frac{|x-\bar{x}|}{2} < \varepsilon$$

$\therefore$ basta tomar $\delta = 2\varepsilon$ //

P4. Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{ln(1+x)} & \text{si } x > 0, \\ (x-\alpha)^2 & \text{si } x < 0, \\ \beta & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Encuentre todos los valores de α y β para los cuales $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

Primero notamos que $\frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$ es continua $\forall x > 0$ y que $(x-\alpha)^2$ es continua $\forall x < 0$, así que el caso a estudiar es en $x = 0$, entonces estudiaremos los límites laterales y los igualamos a β

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} \Leftrightarrow \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x}{\ln(1+x)}}_{\to 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = 1$$

Entonces tenemos que $\beta = 1$, ahora necesitamos encontra el valor de α

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} (x-\alpha)^2 = \alpha^2 = 1$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 \lor \alpha = -1$$

$\therefore$ La función es continua $\forall x$ si $\beta = 1$

y $\alpha = 1 \lor \alpha = -1$ //

P5. Considere la función $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\tan(x)} & \text{si } x \neq 0, \\ a & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Demuestre que la función es continua en su dominio ssi a=0.

Calculamos el límite cuando $x \to 0$,
pues es continua en el resto de su dominio

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\tan(x)} \iff \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{x}{\sin(x)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{\to 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\tan(x)} = 0$$

$\therefore$ $f(x)$ es continua en todo su dominio
solo si $a = 0$.