

Auxiliar 1: Subsucesiones y Continuidad

Profesor: Juan José Maulen

Auxiliar: Iñaki Escobar Cano

P1. Sea la sucesión y_n definida por: $y_n = \left(\frac{2n-1}{n}\right)^{\exp(1/n)}$. Estudie la convergencia de y_n .

P2. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en a y $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = a$, entonces demuestre que $\lim_{x \rightarrow b} f(g(x)) = f(a)$.

P3. Sea la función $h(x)$ definida por: $h(x) = \sqrt{3x+6}$, en $[1, \infty)$.

Estudie la continuidad de $h(x)$ en $[1, \infty)$ a través de la caracterización $\varepsilon - \delta$.

P4. Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0, \\ (x - \alpha)^2 & \text{si } x < 0, \\ \beta & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Encuentre todos los valores de α y β para los cuales $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

P5. Considere la función $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\tan(x)} & \text{si } x \neq 0, \\ a & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Demuestre que la función es continua en su dominio ssi $a=0$.

Resumen

Convergencia: Sea (s_n) una sucesión y $l \in \mathbb{R}$, s_n converge si. $s_n \rightarrow l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |s_n - l| \leq \varepsilon$

Sucesión acotada: (s_n) es acotada si: s_n acotada $\iff \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |s_n| \leq M$

Subsucesión: Sea (s_n) una sucesión y sea $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente. Se denomina subsucesión de (s_n) generada por ϕ a la sucesión $(s_{\phi(n)})$.

Convergencia y subsucesiones: Sea (s_n) una sucesión y $l \in \mathbb{R}$. Entonces: $s_n \rightarrow l \iff$ Todas las subsucesiones de (s_n) convergen a l

Teorema de Bolzano-Weierstrass: Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.

Función continua en un punto: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. f es una función continua en $\bar{x}$ si: $x_n \rightarrow \bar{x}, x_n \in A \implies f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$

Álgebra de funciones continuas: Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en $A \cap B$. Entonces: $f \pm g, f \cdot g, \lambda \cdot f, \frac{f}{g}$ (con $g(x) \neq 0$) son continuas.

Además, la composición de funciones continuas es una función continua.

Continuidad: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall \bar{x} \in A$, diremos que f es continua.