

Resumen Auxiliar 11
Introducción al Cálculo - MA1001-9 - Otoño 2024
Gisela Abarca Andereya & Ignacio Dagach Abugattas ♡♡

DEFINICIÓN (SUCESIÓN) Una sucesión real es una función:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto f(n) \end{aligned}$$

DEFINICIÓN (CONVERGENCIA) Diremos que la sucesión (s_n) converge a ℓ o bien que los términos s_n tienden a ℓ (lo cual anotaremos $s_n \rightarrow \ell$) si se cumple que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) s_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon].$$

Teorema 9.1. Si (s_n) es una sucesión que converge a $\ell_1 \in \mathbb{R}$ y también a $\ell_2 \in \mathbb{R}$, entonces necesariamente $\ell_1 = \ell_2$.

DEFINICIÓN (DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA SUCESIÓN) Si (s_n) es una sucesión que converge a ℓ , entonces ℓ se llama *límite* de la sucesión, lo cual se anotará:

$$\ell = \lim s_n \quad \text{o bien} \quad \ell = \lim_n s_n \quad \text{o bien} \quad \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

DEFINICIÓN (DEFINICIÓN DE SUCESIÓN NULA) (s_n) se llamará sucesión nula si $s_n \rightarrow 0$.

DEFINICIÓN (SUCESIÓN ACOTADA) (s_n) se llamará sucesión acotada si

$$(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |s_n| \leq M.$$

Teorema 9.2. Sean $(u_n), (v_n)$ sucesiones. Las siguientes proposiciones son ciertas

1. (u_n) es nula si y sólo si $(|u_n|)$ es nula.
2. Si (u_n) es una sucesión nula entonces (u_n) es una sucesión acotada.
3. Si (u_n) es una sucesión nula y $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |v_n| \leq u_n$ entonces (v_n) es una sucesión nula.
4. Si (u_n) y (v_n) son sucesiones nulas entonces $(u_n + v_n)$ y $(u_n \cdot v_n)$ son sucesiones nulas.
5. Si (u_n) y (v_n) son sucesiones acotadas entonces $(u_n + v_n)$ y $(u_n \cdot v_n)$ son sucesiones acotadas.
6. Si (u_n) es una sucesión nula y (v_n) es una sucesión acotada entonces $(u_n \cdot v_n)$ es una sucesión nula. Un caso particular de esto es cuando $v_n = c$ constante.

Resumen Auxiliar {
Introducción al Cálculo - MA1001-9 - Otoño 2024
Gisela Abarca Andereya & Ignacio Dagach Abugattas ♡

Proposición 9.1. Sea (s_n) una sucesión de números reales entonces $s_n \rightarrow \ell \iff (s_n - \ell)$ es una sucesión nula.

Proposición 9.2. Sea (s_n) una sucesión de números reales. Si (s_n) es convergente entonces (s_n) es acotada.

Proposición 9.3 (Álgebra de límites). Sean (u_n) y (v_n) dos sucesiones convergentes a u y v , respectivamente. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces las sucesiones $(u_n + v_n)$, $(u_n - v_n)$, $(u_n \cdot v_n)$ y (λu_n) son también convergentes a $u + v$, $u - v$, $u \cdot v$ y λu , respectivamente.

Es decir, si $u_n \rightarrow u$ y $v_n \rightarrow v$ entonces:

- $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$
- $\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n$
- $\lim(u_n \cdot v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$
- $\lim(\lambda u_n) = \lambda \lim u_n$.

Proposición 9.4. Si (s_n) es una sucesión nula entonces la sucesión $(\frac{1}{s_n})$, de estar bien definida, es no acotada y en consecuencia no es convergente.

Proposición 9.6. Sea (s_n) una sucesión real. Si (s_n) converge a $\ell \neq 0$ entonces:

- (1) $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)$ tal que s_n tiene el mismo signo de ℓ (es decir $s_n \cdot \ell > 0$).
- (2) La sucesión $(\frac{1}{s_n})$ es acotada.

Proposición 9.7. Sean (u_n) y (v_n) dos sucesiones convergentes a u y v respectivamente. Si $v \neq 0$, la sucesión (u_n/v_n) es convergente a (u/v) .

Es decir

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}.$$

- $s_n = a$, para $a \in \mathbb{R}$, satisface $\lim s_n = a$.
- $\lim \frac{1}{n} = 0$.
- $\lim \frac{1}{n^k} = 0$, para $k \in \mathbb{N}$.
- $s_n = n^k$, para $k \in \mathbb{N}$, no es acotada luego diverge.
-

$$s_n = \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \dots + b_1 n + b_0},$$

para $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- si $p < q$, entonces $s_n \rightarrow 0$
 - si $p = q$, entonces $s_n \rightarrow \frac{a_p}{b_q}$
 - si $p > q$, entonces $(\frac{1}{s_n}) \rightarrow 0$. Entonces (s_n) no es acotada y luego diverge.
- $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.
 - $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$, para $a \in \mathbb{R}$.

Resumen AUX 11 (GRACIAS gise ☺)

- **Teorema:** Sean (u_n) y (w_n) sucesiones convergentes a u y w , respectivamente. Si existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que

$$u_n \leq w_n$$

entonces $u \leq w$.

- **Teorema del Sandwich:** Sean (u_n) , (v_n) y (w_n) sucesiones reales. Si (u_n) y (w_n) convergen al real ℓ y además tal que

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) u_n \leq v_n \leq w_n,$$

entonces la sucesión (v_n) también converge y $\lim v_n = \ell$.

- **Desigualdad de Bernoulli I:**

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall h > -1)(1+h)^n \geq 1+nh$$

- **Propiedad(Sucesión q^n):**

1. $\lim q^n = 1$, si $q = 1$
2. $\lim q^n = 0$, si $|q| < 1$
3. $\lim q^n$ no existe si $q \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$

- **Propiedad(Sucesión $(q_n)^n$):** Para $q \rightarrow q$

1. $\lim (q_n)^n = 0$, si $|q| < 1$
2. $\lim (q_n)^n$ no existe, si $|q| > 1$

- **Propiedades:**

- $\lim \sqrt[n]{a} = 1$, para $a \in \mathbb{R}^+$
- $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$, para $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}^+$

- **Desigualdad de Bernoulli II:**

$$(\forall n \in \mathbb{N})(h > 0), (1+h)^n \geq 1+nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2$$

o equivalentemente,

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall h > 0) \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2}$$

- **Propiedades:**

- $\lim \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim n^k q^n = 0$ para $k \in \mathbb{N}$ y $q \in (-1, 1)$

- **Desigualdad de Bernoulli III:**

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall u \in (-1, \frac{1}{n})), (1+u)^n \leq \frac{1}{1-nu}$$

- **Proposición:** Se tiene que

$$\lim (1+h_n)^n = 1$$

cuando (h_n) y (nh_n) son sucesiones nulas.

- **Definición:** Sea (s_n) una sucesión real. Entonces:

- Diremos que (s_n) es una sucesión creciente a partir de n_0 si $\forall n \geq n_0$ se tiene que $s_{n+1} \geq s_n$.
- Diremos que (s_n) es una sucesión decreciente a partir de n_0 si $\forall n \geq n_0$ se tiene que $s_{n+1} \leq s_n$.
- Si una sucesión es creciente, decreciente, estrictamente creciente o estrictamente decreciente, entonces la llamamos sucesión monótona.

- **Teorema de las sucesiones monótonas:**

- Si (s_n) es una sucesión (estrictamente) creciente a partir de n_0 y acotada superiormente entonces es convergente y
- Si (s_n) es una sucesión (estrictamente) decreciente a partir de n_0 y acotada inferiormente entonces es convergente y

$$\lim s_n = \sup\{s_n : n \geq n_0\}$$

$$\lim s_n = \inf\{s_n : n \geq n_0\}$$

- **El número e :** $s_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ es una sucesión creciente y acotada superiormente cuyo límite es $\lim (1 + \frac{1}{n})^n = e$.

Resumen

- **Exponencial:** Se define la función exponencial como:

$$\exp(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \forall x \in \mathbb{R}$$

Está bien definida ya que la sucesión es convergente para todo $x \in \mathbb{R}$. Se define $e := \exp(1)$

- **Desigualdad exponencial:**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq x + 1$$

- **Propiedades exponencial:** Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $n, p \in \mathbb{N}$, entonces:

- $\exp(x) \exp(y) = \exp(x + y)$
- $\exp(x) > 0$
- $x < 1 \Rightarrow \exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
- $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$
- $\exp(px) = (\exp(x))^p$
- $\lim \exp(-n) = 0$
- $\exp\left(\frac{x}{p}\right) = \sqrt[p]{\exp(x)}$
- $\lim \exp\left(\frac{1}{n}\right) = 1$

- **Proposición:** $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ es biyectiva.

- **Desigualdad Logaritmo:** $\forall x > 0$,

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$$

- **Propiedades Logaritmo:** Sean $x, y \in (0, +\infty)$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces:

- $\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$
- $\ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$

- **Potencia de exponente real:** Sean $a > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se define: $a^\alpha := \exp(\alpha \ln(a))$

- **Potencias:** Sean $a > 0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces:

- $\ln(a^\alpha) = \alpha \ln(a)$
- $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta$
- $(\exp x)^\alpha = \exp(\alpha x)$
- $(a^\alpha x)^\beta = a^{\alpha\beta}$

- **Logaritmo de base a :** Sea $a > 0$ y $a \neq 1$, se define $\log_a x := \frac{\ln x}{\ln a}$

- **Propiedades:** Sean $x, y, a, b > 0$ con $a, b \neq 1$, entonces:

- $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$
- $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

- **Límites conocidos:** Sea $(a_n) \rightarrow a$, entonces:

- $\exp(a_n) \rightarrow \exp a$
- $\left(\frac{\exp(a_n) - \exp(a)}{(a_n) - a}\right) \rightarrow \exp(a)$
- $\sin(a_n) \rightarrow \sin(a)$
- $\ln(a_n) \rightarrow \ln(a)$
- $\left(\frac{\ln(a_n) - \ln(a)}{(a_n) - a}\right) \rightarrow \frac{1}{a}$
- $\cos(a_n) \rightarrow \cos(a)$

Resumen Auxiliar 13
Introducción al Cálculo - MA1001-9 - Otoño 2024
Gisela Abarca Andereya & Ignacio Dagach Abugattas ♡♡

DEFINICIÓN (PUNTO DE ACUMULACIÓN) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}$. El real $\bar{x} \in \mathbb{R}$ se llama punto de acumulación de A si existe alguna sucesión $(x_n) \subseteq A$ (con valores en A) tal que $x_n \neq \bar{x}$, $\forall n \geq n_0$ algún $n_0 \in \mathbb{N}$ y $x_n \rightarrow \bar{x}$.

El conjunto de los puntos de acumulación de $A \subseteq \mathbb{R}$ se denota A' .

DEFINICIÓN Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $\bar{x} \in A'$, es decir $\bar{x}$ es un punto de acumulación de A . Diremos que f tiende a $\ell \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a $\bar{x}$ (lo cual se denotará $f(x) \rightarrow \ell$ cuando $x \rightarrow \bar{x}$), o bien que ℓ es el límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow \bar{x}$ (lo que se anota $\ell = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x)$) si para toda sucesión (x_n) con valores en A , convergente a $\bar{x}$ y tal que $x_n \neq \bar{x}$, se cumple que la sucesión de las imágenes $(f(x_n))$ es convergente a ℓ .

Teorema 12.1. *Si una función f tiene límite cuando $x \rightarrow \bar{x}$ entonces dicho límite es único.*

DEFINICIÓN Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Si denotamos por $A^+ = A \cap (\bar{x}, +\infty)$ y $A^- = A \cap (-\infty, \bar{x})$, entonces

- i) Se llama límite lateral por la derecha de la función f en $\bar{x}$ a $\lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x \in A^+}} f(x)$.
- ii) Análogamente, a $\lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x \in A^-}} f(x)$ se le llama límite lateral por la izquierda de la función f en $\bar{x}$.

El límite lateral por la derecha se denota por $\lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x > \bar{x}}} f(x)$ o $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x)$ y el límite lateral por la izquierda se denota por $\lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x < \bar{x}}} f(x)$ o bien por $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x)$.

Teorema 12.6 (Caracterización ε - δ de límite). *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x}$ punto de acumulación de A entonces*

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap ([\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta] \setminus \{\bar{x}\}), \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Resumen Auxiliar Extra C6
Introducción al Cálculo - MA1001-9 - Otoño 2024
Gisela Abarca Andereya & Ignacio Dagach Abugattas ♡☺

- Si $\bar{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (\bar{x}, +\infty)$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap (\bar{x}, \bar{x} + \delta], \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- Si $\bar{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (-\infty, \bar{x})$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap [\bar{x} - \delta, \bar{x}), \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Observación: La frase $\forall x \in A \cap [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta] \setminus \{\bar{x}\}$ que aparece en la caracterización, suele ser escrita usando una implicancia. De este modo se escriben:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \left[0 < |x - \bar{x}| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \right].$$

DEFINICIÓN Sea $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea ℓ un real fijo.

- i) Si A no es acotado superiormente entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists m > 0, \forall x \in A \cap [m, \infty), \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- ii) Si A no es acotado inferiormente entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists m < 0, \forall x \in A \cap (-\infty, m], \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

DEFINICIÓN (ASÍNTOTAS HORIZONTALES)

1. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell_1$ entonces la recta $y = \ell_1$ se llama asíntota horizontal de f .
2. Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell_2$ entonces la recta $y = \ell_2$ es otra asíntota horizontal de f .

DEFINICIÓN (LÍMITES SOBRE A') Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Si $\bar{x} \in A'$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta], f(x) \geq M.$$

2. Si $\bar{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (\bar{x}, +\infty)$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap (\bar{x}, \bar{x} + \delta], \quad f(x) \geq M.$$

3. Si $\bar{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (-\infty, \bar{x})$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap [\bar{x} - \delta, \bar{x}), \quad f(x) \geq M.$$

4. Si A no es acotado superiormente, entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists m > 0, \forall x \in A \cap [m, \infty), \quad f(x) \geq M.$$

5. Si A no es acotado inferiormente, entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists m < 0, \forall x \in A \cap (-\infty, m], \quad f(x) \geq M.$$

DEFINICIÓN (ASÍNTOTAS VERTICALES) Si $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) = \pm\infty$, se dice que la recta $x = \bar{x}$ es una asíntota vertical de f .

DEFINICIÓN (ASÍNTOTAS OBLICUAS)

1. La recta $y = m_1x + n_1$ es una asíntota oblicua de f cuando $x \rightarrow +\infty$ si se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (m_1x + n_1) = 0.$$

2. Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (m_2x + n_2) = 0$ entonces la recta $y = m_2x + n_2$ es una asíntota oblicua de f cuando $x \rightarrow -\infty$.