Auxiliar 6

Sucesiones II y Límite de Funciones

Profesora: Jessica Trespalacios J.
Auxiliar: Ignacio Dagach Abugattas

P1. Definición Recursiva y Creciente/Acotada

a) Considere la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por recurrencia $x_{n+1} := \sqrt{\dfrac{8+x_n^2}{3}}, \quad x_0 = 10.$

i) Demuestre que $x_n \geq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$

ii) Demuestre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona

iii) Concluya que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y calcule su límite

b) Considere la sucesión

$$c_n := \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k}\right)^k, \quad \text{para } n \geq 1.$$

i) Muestre que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

ii) Pruebe que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente.

iii) Concluya que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

c) Demuestre que la sucesión

$$c_n := \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

converge.

Indicación: Calcule $\dfrac{c_n}{c_{n+1}}$.

P2. Límites en [Sucesiones + Funciones]

Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3(\exp(x)-1)}{(1-\cos(2x))^2}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+5}{x^2+3x-4}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sin(\ln(1+\exp(-x)))}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{\exp(x^2)-1}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(1-\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\right)$

f) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\cos\left(\ln(1+\exp(-x))\right)}{x^2}$

g) $\lim\limits_{n\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$

h) $\lim\limits_{n\to \infty} \dfrac{(1+n)^{4n}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} 4k^3\right)^n}.$

Indicación: Recuerde que:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

i) $\lim\limits_{n\to \infty} \dfrac{n^3a^n-nb^n}{n^5a^n+\sqrt{n^2+1}b^n},\ 0<a<b.$

j) $\lim\limits_{n\to \infty} \left(\sqrt{n+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}-\sqrt{n+\sqrt[n]{3-\frac{1}{n}}}\right)\times \sqrt{n+2^{-n}}.$

k) $\lim\limits_{n\to \infty} \left(\dfrac{n\sin(n^2)+3n}{2n^3+3^{n+1}}\right)^n.$

l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin^2(x)}-\sqrt{1-\sin^2(x)}}{\tan^2(x)}.$

m) $\lim\limits_{x\to \infty} (\dfrac{x+1}{x-2})^{\frac{x}{2}}$

n) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$

ñ) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$

o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2}$

p) $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^x-e^{x^2}\right)$

q) $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x)^{-\frac{1}{x^2}}$

r) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x-e}{x-1}$

s) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos(x)-1)^3\cot^4\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan^2(x)}$

P3. Límites Laterales

a) Determine, de existir, el siguiente límite. Si no existe debe demostralo también.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(|\alpha x|) - |\beta x|}{x}, \quad \text{Donde } \alpha > \beta > 0$$

b) Sean $a, b \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida parcialmente según:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{bx} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{e^{bx} - 1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Encuentre una relación entre a y b para que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ exista.

c) Considere $f(x) = \dfrac{x^2 \exp\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + x^2}$.

i) Determine $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

ii) Determine $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

Hint: Considere el cambio de variable $u = \frac{1}{x}$.

d) Considere $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x) - 1}{e^{x^2} - 1} & \text{si } x \in A,\ x > 0 \\ \dfrac{x^2 - x}{2x + x^2} & \text{si } x \in A,\ x < 0 \end{cases}$$

i) Determine, de existir, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

ii) Determine, de existir, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

e) Determine los valores de las constantes $a, b \in \mathbb{R}$ de tal forma que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0),$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left((1 + a)x^2\right)}{1 - \cos(x)}, & \text{si } x < 0, \\ b, & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{e^{ax} - 1}{\ln\left(x^4 + 1\right)}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

P4. Bernoulli

a) Sea (h_n) con $h_n > 0$ y $\left(\frac{1}{nh_n}\right) \to 0$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+h_n)^n} = 0.$$

b) Sea (v_n) con $v_n \in (0,1)$ y $\left(\frac{1}{nv_n}\right) \to 0$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} (1-v_n)^n = 0.$$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n$

d) $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right)^{(n-1)^2}$

e) $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^3}\right)^{3n^2}$.