

Resumen

- **Acotamiento:** Sea $A \subset \mathbb{R}$, diremos que:
 - A es acotado superiormente $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in A, x \leq M$
 - A es acotado inferiormente $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{A} : \forall x \in A, x \geq M$
 - A es acotado $\Leftrightarrow A$ es acotado superior e inferiormente
- **Máximo y mínimo:** Sea $A \subset \mathbb{R}$, $M, m \in \mathbb{R}$, diremos que:
 - M es máximo de $A \Leftrightarrow M \in A \wedge M$ es cota superior de A
 - m es mínimo de $A \Leftrightarrow m \in A \wedge m$ es cota inferior de A
- **Supremo e ínfimo:** Sea $A \subset \mathbb{R}$, $s, u \in \mathbb{R}$, diremos que:
 - s es supremo de $A \Leftrightarrow s$ es cota superior de $A \wedge \forall M$ cota superior de $A, s \leq M$
 - u es ínfimo de $A \Leftrightarrow u$ es cota inferior de $A \wedge \forall m$ cota inferior de $A, u \geq m$
- **Proposición (Caracterización vía ε):** Sea $A \subset \mathbb{R}$, $s, u \in \mathbb{R}$
 - s es supremo de $A \Leftrightarrow s$ c.s. de $A \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, s - \varepsilon < x$
 - u es ínfimo de $A \Leftrightarrow u$ c.i. de $A \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, u + \varepsilon < x$
- **Proposición:** Sea $A \subset \mathbb{R}$, $M, m \in \mathbb{R}$,
 - M es máximo de $A \Rightarrow \exists s$ supremo de $A \wedge s = M$
 - m es mínimo de $A \Rightarrow \exists u$ ínfimo de $A \wedge u = m$
- **Axioma del Supremo:** $\forall A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset \wedge A$ acotado superiormente $\Rightarrow \exists s$ supremo de A
- **Propiedad del ínfimo:** $\forall A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset \wedge A$ acotado inferiormente $\Rightarrow \exists u$ ínfimo de A
- **Raíz n-ésima:** $x \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{x} = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ | r^n \leq x\}$
- **Teorema:** \mathbb{N} no es acotado superiormente.
- **Teorema (Propiedad Arquimediana):** $\forall \varepsilon, \exists n \in \mathbb{N}, n \cdot \varepsilon > 1$

Resumen Auxiliar 11: Sucesiones
Introducción al Cálculo - MA1001-3 - Primavera 2024
Auxiliar Ignacio Dagach Abugattas ♡☞

DEFINICIÓN (SUCESIÓN) Una sucesión real es una función:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto f(n) \end{aligned}$$

DEFINICIÓN (CONVERGENCIA) Diremos que la sucesión (s_n) converge a ℓ o bien que los términos s_n tienden a ℓ (lo cual anotaremos $s_n \rightarrow \ell$) si se cumple que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) s_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon].$$

Teorema 9.1. Si (s_n) es una sucesión que converge a $\ell_1 \in \mathbb{R}$ y también a $\ell_2 \in \mathbb{R}$, entonces necesariamente $\ell_1 = \ell_2$.

DEFINICIÓN (DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA SUCESIÓN) Si (s_n) es una sucesión que converge a ℓ , entonces ℓ se llama *límite* de la sucesión, lo cual se anotará:

$$\ell = \lim s_n \quad \text{o bien} \quad \ell = \lim_n s_n \quad \text{o bien} \quad \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

DEFINICIÓN (DEFINICIÓN DE SUCESIÓN NULA) (s_n) se llamará sucesión nula si $s_n \rightarrow 0$.

DEFINICIÓN (SUCESIÓN ACOTADA) (s_n) se llamará sucesión acotada si

$$(\exists M > 0) (\forall n \in \mathbb{N}) |s_n| \leq M.$$

Teorema 9.2. Sean $(u_n), (v_n)$ sucesiones. Las siguientes proposiciones son ciertas

1. (u_n) es nula si y sólo si $(|u_n|)$ es nula.
2. Si (u_n) es una sucesión nula entonces (u_n) es una sucesión acotada.
3. Si (u_n) es una sucesión nula y $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |v_n| \leq u_n$ entonces (v_n) es una sucesión nula.
4. Si (u_n) y (v_n) son sucesiones nulas entonces $(u_n + v_n)$ y $(u_n \cdot v_n)$ son sucesiones nulas.
5. Si (u_n) y (v_n) son sucesiones acotadas entonces $(u_n + v_n)$ y $(u_n \cdot v_n)$ son sucesiones acotadas.
6. Si (u_n) es una sucesión nula y (v_n) es una sucesión acotada entonces $(u_n \cdot v_n)$ es una sucesión nula. Un caso particular de esto es cuando $v_n = c$ constante.

Resumen Auxiliar 11: Sucesiones
Introducción al Cálculo - MA1001-3 - Primavera 2024
Auxiliar Ignacio Dagach Abugattas ♡☞

- $s_n = a$, para $a \in \mathbb{R}$, satisface $\lim s_n = a$.
- $\lim \frac{1}{n} = 0$.
- $\lim \frac{1}{n^k} = 0$, para $k \in \mathbb{N}$.
- $s_n = n^k$, para $k \in \mathbb{N}$, no es acotada luego diverge.

$$s_n = \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \dots + b_1 n + b_0},$$

para $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- si $p < q$, entonces $s_n \rightarrow 0$
- si $p = q$, entonces $s_n \rightarrow \frac{a_p}{b_q}$
- si $p > q$, entonces $(\frac{1}{s_n}) \rightarrow 0$. Entonces (s_n) no es acotada y luego diverge.
- $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.
- $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$, para $a \in \mathbb{R}$.

Proposición 9.1. Sea (s_n) una sucesión de números reales entonces $s_n \rightarrow \ell \iff (s_n - \ell)$ es una sucesión nula.

Proposición 9.2. Sea (s_n) una sucesión de números reales. Si (s_n) es convergente entonces (s_n) es acotada.

Proposición 9.3 (Álgebra de límites). Sean (u_n) y (v_n) dos sucesiones convergentes a u y v , respectivamente. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces las sucesiones $(u_n + v_n)$, $(u_n - v_n)$, $(u_n \cdot v_n)$ y (λu_n) son también convergentes a $u + v$, $u - v$, $u \cdot v$ y λu , respectivamente.

Es decir, si $u_n \rightarrow u$ y $v_n \rightarrow v$ entonces:

- $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$
- $\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n$
- $\lim(u_n \cdot v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$
- $\lim(\lambda u_n) = \lambda \lim u_n$.

Proposición 9.4. Si (s_n) es una sucesión nula entonces la sucesión $(\frac{1}{s_n})$, de estar bien definida, es no acotada y en consecuencia no es convergente.

Proposición 9.6. Sea (s_n) una sucesión real. Si (s_n) converge a $\ell \neq 0$ entonces:

(1) $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)$ tal que s_n tiene el mismo signo de ℓ (es decir $s_n \cdot \ell > 0$).

(2) La sucesión $(\frac{1}{s_n})$ es acotada.

Proposición 9.7. Sean (u_n) y (v_n) dos sucesiones convergentes a u y v respectivamente. Si $v \neq 0$, la sucesión (u_n/v_n) es convergente a (u/v) .

Es decir

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}.$$