Auxiliar 5: Ax. Supremo y Sucesiones

Profesora: Jessica Trespalacios J.
Auxiliar: Ignacio Dagach Abugattas

P1. Bienvenidos

a) Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ y $f : X \to \mathbb{R}$ una función acotada superiormente. Definimos:

$$\sup(f) := \sup\{f(x) : x \in X\}.$$

Demuestre lo siguiente:

i) Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son funciones acotadas superiormente, entonces $f + g$ también es una función acotada superiormente.

ii) Se cumple que $\sup(f + g) \leq \sup(f) + \sup(g)$.

b) Dado $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y $a \in \mathbb{R}$, definimos

$$a + A = \{a + x : x \in A\}.$$

Demuestre que si A es acotado superiormente, entonces $a + A$ es acotado superiormente y

$$\sup(a + A) = a + \sup(A).$$

c) Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y definamos

$$-A = \{-x : x \in A\}.$$

Demuestre que si A está acotado inferiormente, entonces $-A$ está acotado superiormente y, además, se cumple que

$$\inf A = -\sup(-A).$$

d) Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ y $f : X \to \mathbb{R}^+$ una función acotada superiormente. Se define $\sup(f) := \sup(f(X))$, y si $\sup(f)$ es finito, en tal caso diremos que la función f es acotada superiormente. Demuestre que:

i) (1.0 pto) Si $f, g : X \to \mathbb{R}^+$ son acotadas superiormente, entonces $f \cdot g$ también es acotada superiormente.

ii) (1.0 pto) $\sup(f \cdot g) \leq \sup(f) \cdot \sup(g)$.

P2. Infima Matraca

a) Dado el conjunto
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge \frac{ax}{1+x} \geq 1 \right\},$$
donde $a \in \mathbb{R}$ es un valor fijo, determine si existen $\sup A$, $\inf A$, $\min A$ y $\max A$. De existir alguno entréguelo explícitamente.

Indicación: Estudie los casos $a > 1$, $a < 1$ y $a = 1$ por separado.

b) Dado el conjunto
$$A = \left\{ \frac{m}{m(n+1)+1} : m, n \in \mathbb{N} \right\},$$
demuestre que $\sup(A) = 1$. ¿Es 1 máximo de A?

Indicación: Puede usar que $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} = 0$.

c) Considere el conjunto A definido por
$$A = \left\{ \frac{1}{|m-n|} : m, n \in \mathbb{N}, m \neq n \right\}.$$
Demuestre que $\inf(A) = 0$. ¿Es 0 mínimo de A?

Indicación: Use la propiedad arquimediana.

d) Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}^+$. Sea a una cota inferior de A y b una cota inferior de B. Demuestre que $a + b$ es una cota inferior del conjunto
$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\},$$
y calcule $\inf(A + B)$ en términos de $\inf(A)$ y de $\inf(B)$.

e) Sea f una función creciente cuyo dominio es el intervalo $[0, 1]$. Demuestre que el conjunto $f([0, 1])$ es acotado superiormente. Calcule el supremo del conjunto $f([0, 1])$ y determine si posee máximo.

f) Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío, se define $A^2 = \{x^2 : x \in A\}$

i) Para el caso particular $A = (-3, -2] \cup (0, 1]$, encuentre explícitamente el conjunto A^2 en la forma de unión de intervalos. Determine (si existen) máximo, mínimo, supremo e ínfimo de A y de A^2.

ii) Para el caso general, demuestre que si A^2 es acotado superiormente, entonces A es acotado y que $\sqrt{\sup(A^2)} \geq max\{\sup(A), -\inf(A)\}$
Obs: No es necesario que demuestre la existencia de $\inf(A)$.

g) Sea $C = \left\{ \frac{n}{n+2} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$. Demuestre que $\inf C = 0$ y $\sup C = 1$.

P3. $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Considere $\gamma \in \mathbb{R}_+$ y las siguientes sucesiones:

- $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $r_n = \dfrac{3n+5}{4n+7}$
- $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $t_n = \dfrac{n^2}{2n^2+1}$
- $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $s_n = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$
- $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $z_n = \sqrt{n + \dfrac{\gamma}{n}} - \sqrt{n}$
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $b_n = \sqrt{5 + |a_n|\cos^2(1+\sqrt{2}n) + \sin(a_n + \sqrt{3}n)}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada
- $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $c_n = (\sqrt{n + \dfrac{\gamma}{n}} - \sqrt{n})b_n^3$
- $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a) Determine para $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, por definición, su límite

b) Encuentre un valor n tal que $|r_n - \frac{3}{4}| \leq 0.001$, le puede ser util que $\frac{243}{4} \sim 60.8$

c) Determine para $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, por definición, su límite

d) Encuentre un valor n tal que $|t_n - \frac{1}{2}| \leq 0.0002$, le puede ser util que $\frac{\sqrt{5000}}{2} \sim 35.36$

e) Determine para $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, por definición, su límite

f) Determine para $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, por definición, su límite

g) Demuestre que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es nula

h) Demuestre que, si $w_n \to \ell \in \mathbb{R}$ y $(w_n - y_n) \to 0$, entonces $y_n \to \ell$

i) Demuestre que, si $w_n \to \ell \in \mathbb{R}$ y $(w_n + y_n) \to \ell$ entonces $y_n \to 0$

P4. Cuando ese ene tiende a ele

Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n!)+2n^2}{3n^2+4}$

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n}$

c) $\lim_{n\to\infty} n(1-\sqrt{1+\frac{3}{n}})$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2(-1)^n}{5-(n-2)^3}$

e) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1})\sqrt{n+2}$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(24e^{n!}\right)}{n}$

g) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+an+b}-\sqrt{n^2+a'n+b'}\right)$

h) $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n+n}{n\cdot s_n^2+1}$, donde $s_n \to \ell$

i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

P5. Definición Recursiva y Creciente/Acotada

a) Considere la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por recurrencia $x_{n+1} := \sqrt{\frac{8+x_n^2}{3}}$, $\quad x_0 = 10$.

i) Demuestre que $x_n \geq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$

ii) Demuestre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona

iii) Concluya que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y calcule su límite

b) Considere la sucesión

$$c_n := \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k}\right)^k, \quad \text{para } n \geq 1.$$

i) Muestre que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

ii) Pruebe que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente.

iii) Concluya que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

c) Demuestre que la sucesión

$$c_n := \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

converge.

Indicación: Calcule $\frac{c_n}{c_{n+1}}$.