# Auxiliar 4: Trigonometría

Profesora: Jessica Trespalacios J.
Auxiliar: Ignacio Dagach Abugattas

## P1. Para comenzar

Encuentre los valores $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $4\sin\left(\frac{x}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 3$

b) $\sin(2x)\cos(x) = 6\sin^3(x)$

c) $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = 1$

d) $(1 - \tan(x))(\sin(2x) + 1) = 1 + \tan(x)$

Demuestre las siguientes identidades trigonométricas:

e) $\cos(4x) = 1 - 8\sin^2(x)\cos^2(x)$

f) $\cos(4x) = \dfrac{1 - \tan^2(2x)}{1 + \tan^2(2x)}$

g) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)\sec^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos(x)\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{sen}(x)$

h) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$, además analícelo gráficamente

i) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$, además analícelo gráficamente

j) $\cot(x) = \tan\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)$

k) $\sin^4(x) + 4\cos^2(x) = (1 + \cos^2(x))^2$

l) $\cos^2(y) - \sin^2(x) = \cos(x - y)\cos(x + y)$

m) $\cos(x + y) = 0 \implies \sin(x + 2y) = \sin(x)$

## P2. Auxiliar 3.5: Funcionometría

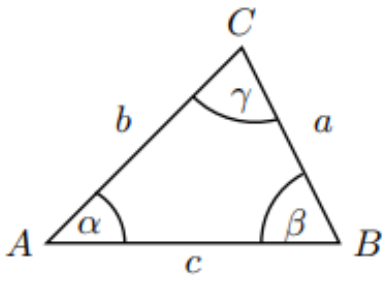
a) Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{|x|}{1 + |x|}$. Estudie la paridad de $f$ y encuentre el conjunto imagen $\operatorname{Im}(f)$. Pruebe que $f$ es inyectiva en $[0, \infty)$ y encuentre una fórmula para $f^{-1}\colon \operatorname{Im}(f) \to [0, \infty)$. Pruebe que $f$ es estrictamente creciente en $[0, \infty)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty, 0]$.

b) Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a - \operatorname{sen}(2x)$, con $a \in \mathbb{R}$ constante. Determine la paridad, el período mínimo, el/los cero/s de $f$ y realice un esbozo del gráfico de $f$.

c) Considere la función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \tan(x) - \operatorname{sen}(2x)$. Determine el dominio de $f$, la paridad, el período mínimo y el/los cero/s de $f$.

d) Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |\operatorname{sen}(x)| + \cos(2x) - 1$. Determine la paridad, verifique que es periódica de período $\pi$ y encuentre el/los cero/s de $f$ en el intervalo $[0, \pi]$.

**P3. Considere el siguiente triángulo**




a) Demuestre que el área $A$ del triángulo está dada por $A = \dfrac{c^2}{2} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}$

[**Sugerencia:** Use el teorema del seno para expresar la altura trazada desde el vértice $C$, en función de $c, \alpha, \beta, \gamma$.]

b) Use el teorema del coseno para probar que si $a = 5$, $b = 7$ y $c = 11$, entonces el triángulo $ABC$ tiene un ángulo que mide más de 90° y uno que mide menos de 30°.

0[**Nota:** Puede usar que $\frac{145}{154} > \frac{\sqrt{3}}{2}$.]

3) Demuestre que $b\cos(\gamma) - c\cos(\beta) = \dfrac{b^2 - c^2}{a}$

iv) Use el teorema del seno para probar que $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\gamma)}$

v) Demuestre la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

vi) Use las partes iv), v) y una fórmula de ángulo doble para probar la fórmula de Mollweide $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$

7) Demuestre que $a^2 + b^2 + c^2 = 2ab\cos(\gamma) + 2ac\cos(\beta) + 2bc\cos(\alpha)$

8) Demuestre que existe una constante $K \in \mathbb{R}$ que cumple que $A = \dfrac{1}{2}Kabc$

ix) Demuestre que:

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\dfrac{\sin(\alpha)}{a}\dfrac{(a^2+c^2-b^2)}{2c} - \dfrac{\sin(\beta)}{b}\dfrac{(b^2+c^2-a^2)}{2c}}{\dfrac{\sin(\alpha)}{a}\dfrac{(a^2+c^2-b^2)}{2c} + \dfrac{\sin(\beta)}{b}\dfrac{(b^2+c^2-a^2)}{2c}}$$

y utilícelo para concluir que:

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a^2-b^2}{c^2}$$